Calcul différentiel — Propriétés de la dérivée

Le calcul de la fonction dérivée à l'aide de la définition donnée précédemment est laborieuse, même pour des fonctions définies par des expressions algébriques simples. Heureusement, il est possible « d'algébriser » le calcul de la dérivée, c'est-à-dire d'identifier des propriétés qui permettent de calculer directement à partir de définition algébrique de la fonction à dériver et sans utiliser la définition. On démontrera dans ce chapitre un certain nombre de propriétés de la dérivée qui, prise ensemble, permettent de déterminer la dérivée d'une fonction en appliquant des « formules de dérivation » (ou « règles de dérivation »).

Ces propriétés ont été découvertes au fil du temps par plusieurs mathématiciens qui travaillaient sur différents problèmes allant du calcul d'aires délimitées par des courbes algébriques à la détermination de minimums et maximums liés à des problèmes de géométrie. C'est à Newton et Leibniz que l'on doit d'avoir su les présenter de manière systématique pour la première fois et d'avoir établit le lien entre le calcul d'aire et la dérivée.

Dans ce qui suit, nous chercherons à établir un certain nombre de propriétés algébriques de la dérivée qui peuvent servir à la détermination des fonctions dérivées sans utiliser la définition donnée au dernier chapitre, mais plutôt en la calculant directement à partir de l'expression algébrique définissant la fonction à dériver.

1 Preuves algébrique et preuves graphiques

Pour simplifier, nous utiliserons parfois des preuves graphiques comme démonstration de certaines propriétés de la dérivée. Pour donner un avant-goût de ce genre d'argument, voici une preuve algébrique et une preuve graphique du fait que la dérivée de la fonction $y = x^2$ est $y' = 2x$.

Proposition 1.

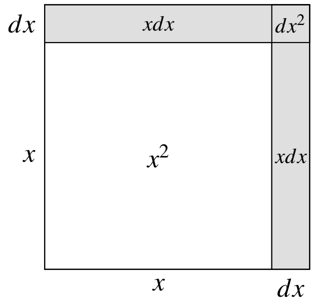
$$\frac{d\left(x^2\right)}{dx} = 2x.$$

Preuve algébrique.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(x^2\right)}{dx} &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} \\
&= \frac{(x^2+2xdx+dx^2)-x^2}{dx} \\
&= \frac{2xdx+dx^2}{dx} \\
&= \frac{dx(2x+dx)}{dx} \\
&= 2x+dx \\
&\approx 2x \qquad \text{car } dx^2 \text{ très petit quand } dx \text{ est petit}
\end{aligned}$$ □

On peut généralement obtenir géométriquement l'expression de dy à partir de relations géométriques. Cette manière de faire est fréquente en physique. Elle permet aussi de mieux comprendre pourquoi certaines quantités peuvent être négligées.

Preuve géométrique. La différentielle dy est l'aire de la région en gris dans le graphique suivant : c'est l'écart entre un carré de côté x et un carré de côté $x + dx$. Quand dx est très petit, l'aide du petit carré dx^2 est négligée.



On peut voir dans ce graphique que

$$dy = x\,dx + x\,dx + dx^2 \approx 2x\,dx.$$

Ainsi,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x\,dx}{dx} = 2x. \qquad \square$$

Proposition 2. La dérivée de la fonction racine carrée est

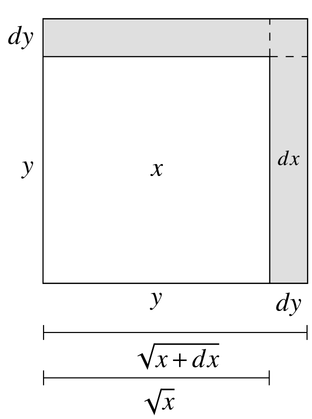
$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Preuve algébrique.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\sqrt{x}\right)}{dx} &= \frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx} \\
&= \frac{\sqrt{x+dx}-\sqrt{x}}{dx}\,\frac{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}} && \text{Conjugué} \\
&= \frac{(x+dx)-x}{dx\left(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{dx}{dx\left(\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+dx}+\sqrt{x}} && \text{Simplification de } dx \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} && dx \text{ infinitésimal} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

car $\sqrt{x+dx} \approx \sqrt{x}$ si dx très petit. $\square$

Preuve graphique. Si x est l'aire d'un carré, alors le côté est $y = \sqrt{x}$. Si l'aire du carré change de x à $x+dx$ (donc varie de la partie en gris dx), alors la variation approximative dy du côté du carré est approximativement $dy = \sqrt{x+dx} - \sqrt{x}$.



D'après la figure, l'aire dx (en gris) peut s'écrire comme

$$dx = y\,dy + y\,dy + dy^2.$$

Si on néglige dy^2 qui est très petit par rapport à dy, on trouve

$$dx = 2y\,dy,$$

donc, en isolant,

$$dy = \frac{1}{2y}\,dx.$$

Enfin, comme $y = \sqrt{x}$, on doit avoir que

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx. \qquad \square$$

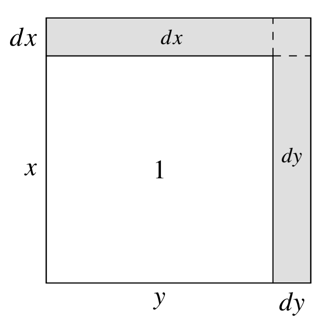
Proposition 3. Si $y = \frac{1}{x}$, alors

$$dy = -\frac{1}{x^2}dx.$$

Preuve algébrique.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x}}{dx} & \\
&= \frac{\frac{x-(x+dx)}{x(x+dx)}}{dx} & \text{Dénominateur commun} \\
&= \frac{\left(\frac{-dx}{x^2+xdx}\right)}{dx} & \\
&= \left(\frac{-dx}{x^2+xdx}\right)\frac{1}{dx} & \text{Propriétés des fractions} \\
&= \frac{-1}{x^2+xdx} & \text{Simplification} \\
&\approx \frac{-1}{x^2} & \text{car } x^2 + x\,dx \approx x^2 \text{ quand } dx \text{ est infinitésimal}
\end{aligned} \qquad \square$$

Preuve graphique. Dans la figure suivante, $y = \frac{1}{x}$.



On veut déterminer dy.

$$
\begin{aligned}
(x+dx)(y+dy) &= 1 \\
xy + y\,dx + x\,dy + dxdy &= 1 \\
xy + y\,dx + x\,dy &= 1 && \text{car } dxdy \text{ très petit.} \\
x\,dy &= 1 - xy - y\,dx \\
dy &= \frac{1 - xy - y\,dx}{x} && \text{si } x \neq 0 \\
&= \frac{1}{x} - y - \frac{y}{x}\,dx \\
&= \cancel{\frac{1}{x}} - \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{1/x}{x}\,dx && \text{car } y = \frac{1}{x} \\
&= -\frac{1}{x^2}\,dx
\end{aligned}
$$

On a donc que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2}.$$

□

Résumé

2 Formules de dérivation

Dans la section précédente, nous avons trouvé quelques dérivée de fonction particulière à l'aide d'arguments algébriques et d'arguments graphiques. On veut maintenant établir des « formules de dérivations » qui permettent de *calculer* la fonction dérivée d'une fonction donnée, sans passer par la définition de dérivée. Les propositions démontrées dans cette section permettent notamment de calculer rapidement la dérivée de n'importe quelle fonction polynômiale.

Note. Pour alléger, à partir de ce point nous utiliserons souvent la notation « $(y)'$ » pour désigner la dérivée de y. Par exemple, on écrit directement

$$\left(x^2\right)' = 2x$$

plutôt que

$$y = x^2 \qquad \frac{dy}{dx} = 2x.$$

2.1 Dérivée d'une puissance entière positive

Commençons par la formule de dérivation la plus remarquable, qui est aussi celle que vous utilisez le plus souvent dans ce cours.

Il est possible de faire de manière générale les calcul effectué pour déterminer la dérivée de x^2, de x^3, de x^4, etc, pour obtenir une formule de dérivation pouvant être utilisée pour dériver facilement une fonction définie par une expression de la forme x^n où $n \in \mathbb{N}$.

Proposition 4 (Puissances entères positives)**.** Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\frac{dx^n}{dx} = \left(x^n\right)' = nx^{n-1}.$$

Exemple 1.

$$\left(x^3\right)' = 3x^2 \qquad \left(x^{10}\right)' = 10x^9 \qquad \left(x^{743}\right)' = 743x^{742}$$
$$\left(x^2\right)' = 2x \qquad \left(x^1\right)' = 1 \cdot x^0 = 1 \qquad (1)' = \left(x^0\right)' = 0 \cdot x^{-1} = 0.$$

Démonstration. Pour cette preuve, nous utiliserons le triangle de Pascal pour développer $(x+dx)^n$. Ce développement débute ainsi :

$$(x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}\,dx + (\text{ termes où } dx \text{ apparait avec un exposant} \geq 2).$$

Notons qu'on peut mettre dx en évidence d'une somme dont les termes tous un facteur dx^2. On trouve ainsi la dérive directement à partir de la définition :

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(x^n\right)}{dx} &= \frac{(x+dx)^n - x^n}{dx} \\
&= \frac{\left(x^n + nx^{n-1}\,dx + [\text{termes}]\,dx^2\right) - x^n}{dx} \\
&= \frac{nx^{n-1}\,dx + [\text{termes}]\,dx^2}{dx} \\
&= \frac{\left(nx^{n-1} + [\text{termes}]\,dx\right)dx}{dx} \\
&= nx^{n-1} + ([\text{termes}]\,dx) \\
&\approx nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

□

Comme le cas particulier $y = x^1 = x$ est très souvent utilisé, il mérite d'être mentionné.

Proposition 5. Si $y = x$, alors

$$\frac{dy}{dx} = (x)' = 1$$

Démonstration. Si $y = x$, alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x+dx)-x}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \qquad \square$$

Démontrstion alternative. Comme $y = x = x^1$ est une puissance entière positive de x, on peut utiliser la proposition 4 :

$$(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1. \qquad \square$$

Résumé

2.2 Dérivée d'une constante

Comme une fonction constante a comme graphe une droite de pente 0, la tangente à cette droite en n'importe quel point est aussi une droite de pente nulle.

Proposition 6 (Dérivée d'une constante)**.** Si $y = C$, où C est une constante réelle quelconque, alors

$$\frac{d(C)}{dx} = (C)' = 0$$

Exemple 2.

$$(2)' = 0 \qquad (-3)' = 0 \qquad (0)' = 0 \qquad (\pi)' = 0$$

Démonstration. Comme $y = f(x) = C$ peut importe la valeur de x, on a que

$$\begin{aligned} \frac{d(C)}{dx} &= \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} \\ &= \frac{C-C}{dx} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \square$$

De manière similaire au cas où y est une fonction constante, la dérivée de $y = x$ coïncide avec l'intuition : $y = x$ est une droite de pente 1, donc toute tangente à cette droite doit être de pente 1.

Résumé

2.3 Dérivée d'un multiple réel d'une fonction

La prochaine formule de dérivation comporte un élément nouveau. Les formules démontrées dans les sections précédentes pour les puissances entières positives et pour les fonctions constantes, des fonctions aux formes fixées. Pour la prochaine formule, la preuve que nous donnons est valide pour n'importe quelle fonction $u = f(x)$ qui a une dérivée. À cause de cela, nous devons formuler la formule à l'aide de cette fonction quelconque u.

Proposition 7 (Dérivée d'un multiple consant d'une fonction)**.** Si $y = Cu$, où $u = f(x)$ est une fonction de x, alors

$$\frac{d}{dx}\left(Cu\right) = C\frac{du}{dx}$$

Ou encore :

$$\left(Cu\right)' = Cu'$$

Exemple 3.

$$\left(3x^5\right)' = 3\left(x^5\right)' \qquad \left(\frac{x^3}{5}\right)' = \frac{1}{5}\left(x^3\right)'$$

$$\left(\frac{x^5}{\sqrt{3}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x^5\right)' \qquad \left(\pi x^2\right)' = \pi\left(x^2\right)'$$

Preuve algébrique. Si $u = f(x)$, alors $du = f(x+dx) - f(x)$. Donc, comme $f(x) = u$, on a que

$$u + du = f(x+dx)$$

et aussi que

$$C(u+du) = Cf(x+dx).$$

La différentielle $d(Cu)$ peut se calculer comme

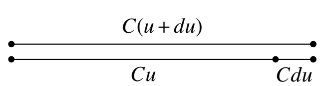
$$d(Cu) = Cf(x+dx) - Cf(x) = C(u+du) - Cu.$$

On a donc que

$$\begin{aligned}\frac{d(Cu)}{dx} &= \frac{C(u+du)-Cu}{dx}\\ &= \frac{Cu+Cdu-Cu}{dx}\\ &= \frac{Cdu}{dx}\\ &= C\frac{du}{dx}\end{aligned}$$

□

Preuve graphique. Si la longueur u est variable en fonction de x. Si elle s'accroit d'une petite longueur du quand x s'accroit de dx, la longueur Cu (où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque) s'accroit d'une longueur Cdu.



□

Résumé

2.4 Dérivée d'une somme de deux fonctions

Comme dans la dernière section, la prochaine proposition peut être utilisée pour dériver la somme de deux fonctions quelconques $u = f(x)$ et $v = g(x)$. Il faut donc adapter la démonstration pour qu'elle soit valable dans ce contexte général.

Proposition 8 (Dérivée d'une somme de deux fonctions)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions d'une même variable, alors

$$\frac{d\big(u+v\big)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx},$$

ou encore

$$(u+v)' = u' + v'.$$

Exemple 4.

$$\Big(-x^2+3x\Big)' = \Big(-x^2\Big)' + \Big(3x\Big)'\Big(x^2-3x\Big)' = \Big(x^2+(-3x)\Big)' = \Big(x^2\Big)' + \Big(-3x\Big)'$$

Preuve algébrique. Si $u = f(x)$ et $v = g(x)$ sont deux fonctions, alors

$$du = f(x+dx) - f(x) \text{ et } dv = g(x+dx) - g(x).$$

En isolant $f(x+dx)$ et $g(x+dx)$ dans ces deux égalités, on trouve que

$$f(x+dx) = f(x) + du = u + du \text{ et } g(x+dx) = g(x) + dv = v + dv.$$

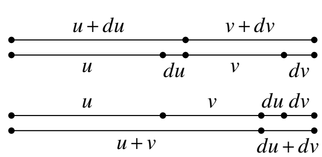
On peut donc déterminer la variation $d(u+v)$:

$$\begin{aligned}
\frac{d\big(u+v\big)}{dx} &= \frac{\Big(f(x+dx)+g(x+dx)\Big) - \Big(f(x)+g(x)\Big)}{dx} \\
&= \frac{\Big((u+du)+(v+dv)\Big) - (u+v)}{dx} \\
&= \frac{du+dv}{dx} \\
&= \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a que

$$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}. \qquad \square$$

Preuve graphique.



$\square$

Bien que la proposition 8 permette de dériver la somme de deux fonctions, elle permet aussi de dériver la différence de deux fonctions, car une différence est une somme où un des fonction est multiplié par la constante -1 :

$$u - v = u + (-1)v.$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
\Big(x^2-x^3\Big)' &= \Big(x^2+(-1)x^3\Big)' \\
&= \Big(x^2\Big)' + \Big((-1)x^3\Big)' && \text{Dérivée d'une somme} \\
&= 2x + (-1)\Big(x^3\Big)' \\
&= 2x + (-1)3x^2 \\
&= 2x + -3x^2
\end{aligned}$$

En pratique, il ne sera pas nécessaire de donner ces détails à chacun des calculs de dérivés. Il est cependant important de comprendre pourquoi on ne peut pas appliquer directement la proposition 8 sans utiliser cette réécriture de la différence.

On peut aussi généraliser la proposition à la somme (ou la différence) de plusieurs fonctions. Par exemple, si on doit dériver la somme de trois fonctions, on peut utiliser le fait que

$$u+v+w=(u+v)+w,$$

pour considérer la somme de trois fonctions $u+v+w$ comme la somme de la fonction $u+v$ et de la fonction w, donc comme une somme de deux fonctions.

$$\begin{aligned}
\left(x^2+x^3+x^4\right)' &= \left(\left(x^2+x^3\right)+x^4\right)' && \\
&= \left(x^2+x^3\right)' + \left(x^4\right)' && \text{Dérivée d'une somme} \\
&= \left(x^2\right)' + \left(x^3\right)' + \left(x^4\right)' && \text{Dérivée d'une somme} \\
&= 2x+3x^2+4x^3 && \text{Dérivée d'une puissance}
\end{aligned}$$

Si on a plusieurs fonctions on peut répéter la même idée.

On peut donc utiliser la généralisation suivante de la proposition 8.

Corollaire. La dérivée d'une somme ou d'une différence de plusieurs fonctions est donnée par

$$\left(\pm u \pm v \pm w \pm \cdots \pm z\right)' = \pm u' \pm v' \pm w' \pm \cdots \pm z'$$

Exemple 5. En combinant le dernier corollaire et les autres formules de dérivation démontrées précédemment, on peut déterminer directement la fonction dérivée d'une fonction polynomiale.

$$\begin{aligned}
\left(x^3-4x^2+3x+1\right)' &= 3x^2-8x+3 \\
\left(5x^6+x^5-7x^2+1\right)' &= 30x^5+5x^4-14x \\
\left(3x^4-4x^3+5x^2-x+22\right)' &= 12x^3-12x^2+10x-1
\end{aligned}$$

Note. Les deux dernières propriétés (dérivée d'un multiple contant d'une fonction et dérivée de la somme de deux fonctions) prises ensemble forment une propriété appelée *linéarité* de la dérivée. Les limites et plusieurs autres constructions mathématiques étudiées au collégial (limites, intégrales, sommes de vecteurs, sommes de matrices, etc) ont cette propriété de « linéarité ». qui est le sujet central du cours d'algèbre *linéaire*.

Exemple 6. À l'aide des propriétés précédentes, on peut déterminer la dérivée d'une fonction polynômiale quelconque. Par exemple

$$\begin{aligned}
\left(3x^2-2x+4\right)' &= \left(3x^2\right)' - (2x)' + (4)' && \text{prop. 8} \\
&= 3\left(x^2\right)' - 3(x)' + (4)' && \text{prop. 7} \\
&= 3\left(2x^1\right) - 3(1) + (0) && \text{dérivée d'une puissance et d'une constante} \\
&= 6x-3
\end{aligned}$$

Par la suite, nous ne donnerons pas autant de détails pour la dérivée des polynômes. La plupart du temps, nous donnerons directement le résultat.

Résumé

2.5 Dérivée d'un produit

Proposition 9 (Formule de Leibniz pour la dérivée d'un produit)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions de x, alors sous forme différentielle

$$d\big(uv\big) = vdu + udv.$$

Le taux de variation instantané est donc

$$\frac{d\big(uv\big)}{dx} = \frac{vdu + udv}{dx},$$

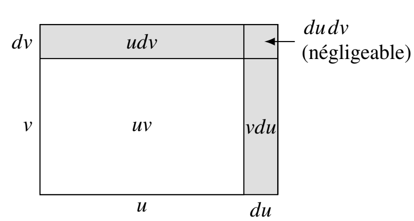
ou encore

$$\big(uv\big)' = u'v + uv'.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\frac{d\big(uv\big)}{dx} &= \frac{\big((u+du)(v+dv)\big) - (uv)}{dx} \\
&= \frac{\big(uv + vdu + udv + dudv\big) - uv}{dx} \\
&= \frac{vdu + udv + dudv}{dx} \\
&\approx \frac{vdu + udv}{dx} && \text{car } dudv \text{ est très petit quand } du \text{ et } dv \text{ sont petits} \\
&= v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}
\end{aligned}$$

Preuve graphique :



La région en gris est $d(uv)$, la variation de uv quand u varie de du et v varie de dv. Selon le graphique, on a que

$$d(uv) = udv + vdu + dudv,$$

ce qui est approximativement
$$d(uv) \approx udv + vdu$$
car le produit $dudv$ est très petit par rapport à du et dv. □

Note. La formule de Leibniz peut aussi s'écrire des deux manières suivante à l'aide des autres notations utilisées pour la dérivée :

$$\big(uv\big)' = u'v + uv'$$

$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Exemple 7. En utilisant la formule de Liebniz (proposition 9), on trouve que

$$\begin{aligned}
\big((x^4+1)(x^6+1)\big)' &= (x^4+1)'(x^6+1) + (x^4+1)(x^6+1)' \\
&= (4x^3)(x^6+1) + (x^4+1)(6x^5) \\
&= (4x^9+4x^3) + (6x^9+6x^5) \\
&= 10x^9 + 6x^5 + 4x^3
\end{aligned}$$

Exemple 8.

$$\begin{aligned}
\big((x+1)\sqrt{x}\big)' &= (x+1)'\big(\sqrt{x}\big) + (x+1)\big(\sqrt{x}\big)' && \text{Formule de Leibniz} \\
&= (1)\big(\sqrt{x}\big) + (x+1)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) && \text{Dérivées d'un polynôme et de } \sqrt{x} \\
&= \sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} && 1\cdot A = A \text{ et } A\frac{1}{B} = \frac{A}{B} \\
&= \frac{\sqrt{x}\big(2\sqrt{x}\big) + x + 1}{2\sqrt{x}} && \text{Dénominateur commun} \\
&= \frac{2x + x + 1}{2\sqrt{x}} && \sqrt{A}\sqrt{A} = A \\
&= \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Résumé

2.6 Dérivée d'un quotient

Un rapport de deux fonctions de la forme $f(x)/g(x)$ peut être dérivée à l'aide de la formule donnée dans la proposition suivante.

Proposition 10 (Dérivée d'un quotient)**.** Si u et v sont toutes deux des fonctions de x, alors, partout où $\frac{1}{v}$ est définie :

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}.$$

Sous forme de taux de variation instantané

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

ou encore

$$\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Note. À l'aide des autres notations pour la dérivée, on peut écrire la formule donnant la dérivée d'un quotient de la manière suivante :

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{\big(f(x)\big)^2}$$

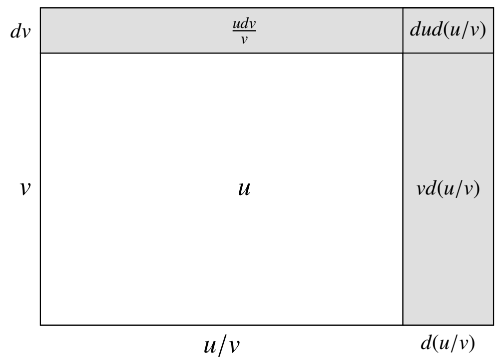
Preuve algébrique. On utilise directement avec la définition $dy = f(x+dx) - f(x)$. La fonction à dériver est $f(x) = \frac{u}{v}$. Si x varie de dx, alors u et v varient respectivement de du et dv pour devenir $u + du$ et $v + dv$.

$$\begin{aligned}
d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{u+du}{v+dv} - \frac{u}{v} \\
&= \frac{v(u+du) - u(v+dv)}{v(v+dv)} \\
&= \frac{(vu + v\,du) - (uv + u\,dv)}{v^2 + vdv} \\
&= \frac{vu + v\,du - uv - u\,dv}{v^2 + vdv} \\
&= \frac{v\,du - u\,dv}{v^2 + vdv} \\
&\approx \frac{v\,du - u\,dv}{v^2}.
\end{aligned}$$

On peut diviser par dx pour obtenir le résultat voulu :

$$\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{vdu - udv}{v^2dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$ □

Preuve graphique. Si u est l'aide d'un rectangle dont l'un des côtés est v, la longueur de l'autre côté est $\frac{u}{v}$. On veut déterminer la variation $d(u/v)$ à partie des variation du de u et dv de v. Ces différentes longueurs sont reliées comme dans l'illustration suivante.



La variation de l'aire u est la région en gris : elle est approximativement la somme des deux rectangles d'aires $\frac{udv}{v}$ et $vd(u/v)$, chacune obtenue en multipliant les deux côtés de ces rectangles. On trouve donc que

$$du \approx \frac{udv}{v} + vd(u/v).$$

On isole $d(u/v)$ qui est ce que l'on veut déterminer. À partir de la dernière approximation, on trouve

$$vd(u/v) = du - \frac{udv}{v}.$$

On divise chaque membre de cette dernière égalité par v et on met au dénominateur commun :

$$d(u/v) = \frac{du}{v} - \frac{udv}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

On divise enfin par dx comme dans l'argument algébrique pour obtenir le résultat voulu. □

Exemple 9. En utilisant la propriété 10 permettant de calculer la dérivée d'un quotient, on trouve que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^4+1}{x^6+1}\right)' &= \frac{\left(x^4+1\right)'\left(x^6+1\right)-\left(x^4+1\right)\left(x^6+1\right)'}{(x^6+1)^2} \\
&= \frac{4x^3\left(x^6+1\right)-\left(x^4+1\right)\left(6x^5\right)}{(x^6+1)^2} \\
&= \frac{\left(4x^9+4x^3\right)-\left(6x^9+6x^5\right)}{(x^6+1)^2} \\
&= \frac{-2x^9+6x^5+4x^3}{(x^6+1)^2} \\
&= \frac{x^3\left(-2x^6+6x^2+4\right)}{(x^6+1)^2}.
\end{aligned}$$

Exemple 10. Dans cet exemple, on utilise la formule de dérivation d'un quotient pour dériver une fonction et on simplifie ensuite le résultat.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2+1}{\sqrt{x}}\right)' &= \frac{\left(x^2+1\right)'\sqrt{x}-\left(x^2+1\right)\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \\
&= \frac{\left(2x\right)\sqrt{x}-\left(x^2+1\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{x} \\
&= \frac{2x\sqrt{x}-\frac{x^2+1}{2\sqrt{x}}}{x} \\
&= \frac{\left(\frac{2x\sqrt{x}(2\sqrt{x})-(x^2+1)}{2\sqrt{x}}\right)}{x} && \text{(Mise au dénominateur commun)} \\
&= \frac{2x\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}\right)-(x^2+1)}{2x\sqrt{x}} && \left(\text{Quotients : } \frac{A/B}{C}=\frac{A}{B}\frac{1}{C}\right. \\
&= \frac{4x\sqrt{x}\sqrt{x}-x^2-1}{2x\sqrt{x}} \\
&= \frac{4x^2-x^2-1}{2x\sqrt{x}} && \left(\text{car } \sqrt{x}\sqrt{x}=x\right) \\
&= \frac{3x^2-1}{2x\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Note. Avec l'ajout de multiple nouvelles règles de dérivation, il devient possible de dériver une fonction de plusieurs manières. Cependant, il y a généralement un raisonnement plus efficace que les autres. Par exemple, pour dériver $\frac{5}{\sqrt[3]{x}}$, il est possible d'utiliser la règle du quotient, mais cela est très inefficace.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)' &= \frac{(5)'\sqrt[3]{x}-5\left(\sqrt[3]{x}\right)'}{\left(\sqrt[3]{(x)}\right)^2} \\
&= \frac{(0)\sqrt[3]{x}-5\left(x^{1/3}\right)'}{\sqrt[3]{x^2}} \\
&= \frac{-5\frac{1}{3}x^{-2/3}}{\sqrt[3]{x^2}} \\
&= \frac{-5x^{-2/3}}{3x^{2/3}} \\
&= -\frac{5}{3x^{4/3}}
\end{aligned}$$

On peux procéder plus simplement remarquant que l'expression à dériver est de la forme Cx^e :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5}{\sqrt[3]{x}}\right)' &= \left(5x^{-1/3}\right)' \\
&= -5\frac{1}{3}x^{-4/3} \\
&= -\frac{5}{3x^{4/3}}
\end{aligned}$$

De manière générale, même si cela donne le bon résultat, il est préférable d'éviter l'utilisation de la règle du quotient quand le numérateur ou le dénominateur est une constante.

Résumé

2.7 Utilisation de la dérivée d'un quotient pour démontrer d'autre formules de dérivation

Proposition 11 (Inverse d'une puissance)**.**

$$\frac{d\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx} = \frac{d\left(x^{-n}\right)}{dx} = -nx^{-n-1}$$

Démonstration. On détermine $\left(x^{-n}\right)'$ de deux manière différentes en utilisent l'identité algébrique et à l'aide de la formule pour la dérivée d'un produit.

$$x^n x^{-n} = 1.$$

En calculant la dérivée de chaque membre de cette égalité, on trouve que

$$\left(x^n x^{-n}\right)' = (1)' = 0$$

parce que $(C)' = 0$ pour n'importe quelle constante.

On peut aussi utiliser la formule donnant la dérivée d'un produit :

$$\begin{aligned}\left(x^n x^{-n}\right)' &= x^{-n}\left(x^n\right)' + x^n\left(x^{-n}\right)' \\ &= x^{-n}\left(nx^{n-1}\right) + x^n\left(x^{-n}\right)'.\end{aligned}$$

Comme on calcule la dérivée d'une même fonction exprimée de deux manières différentes, les deux résultats doivent être égaux. On doit donc avoir que

$$x^{-n}\left(nx^{n-1}\right) + x^n\left(x^{-n}\right)' = 0$$

On isole $\left(x^{-n}\right)'$ dans cette dernière égalité :

$$\left(x^{-n}\right)' = -n\frac{x^{-n}x^{n-1}}{x^n}dx$$

On trouve enfin, en simplifiant l'expression obtenue :

$$\left(x^{-n}\right)' = -nx^{-n-1},$$

ce qui est le résultat désiré. $\square$

Démonstration. Preuve à l'aide de la formule de dérivation d'un quotient.

$$\begin{aligned}
\frac{d\left(\frac{1}{x^n}\right)}{dx} &= \frac{(1)'x^n - (1)(x^n)'}{(x^n)^2} \\
&= \frac{(0)x^n - nx^{n-1}}{x^{2n}} \\
&= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} \\
&= -nx^{(n-1)-2n} \\
&= -nx^{-n-1}
\end{aligned}$$ □

Exemple 11.

$$\left(\frac{3}{x^5}\right)' = 3\left(x^{-5}\right)' = 3(-5)x^{-6} = -\frac{15}{x^6}$$

On peut remarquer que les formules trouvées dans les propositions 4, 11 et 2 sont toutes des cas particuliers d'un schéma plus général :

$$\frac{d\left(x^q\right)}{dx} = rx^{q-1}$$

pour q un exposant rationnel quelconque. Ce schéma est valable.

On verra plus loin que cette formule de dérivation est aussi valable pour n'importe quel exposant réel r (proposition 14).

Résumé

2.8 Règle de chaine

La *règle de chaine* est la formule de dérivation qui permet de dériver des fonctions composées. Elle permet de calcul un éventail beaucoup plus grand de fonctions, notamment plusieurs fonctions aux définitions assez simples que les formules de dérivations obtenues à la section précédente ne nous permettraient pas de dériver.

Proposition 12. Si z est fonction de y et y est une fonction de x, alors le taux de variation de z en fonction de x est le produit des taux de variations :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}.$$

Démonstration.

$$\frac{dz}{\cancel{dy}}\frac{\cancel{dy}}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

□

Exemple 12. Soient $z = y^3 + 1$ et $y = \sqrt{x}$ deux fonctions. On aimerait connaitre le taux de variation de z par rapport à x. On utilise la règle de chaine. Noter que l'on veut le taux de variation de z en fonction de x. Comme $z' = 3y^2$ et $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, on a que

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dx} &= \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\\ &= \left(3y^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\end{aligned}$$

Cette expression n'exprime pas le taux de variation de z en fonction de x. On peut cependant exprimer $\dfrac{dz}{dy} = 3y^2$ en fonction de x en substituant $\sqrt{x}$ à y dans l'expression obtenue.

$$\begin{aligned}\left(3y^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) &= \left(3\left(\sqrt{x}\right)^2\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\ &= (3x)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\ &= \frac{3x}{2\sqrt{x}}\\ &= \frac{3\sqrt{x}}{2}\end{aligned}$$

Note. La règle de chaine peut aussi s'écrire avec la notation $f(x)$. La dérivée d'une fonction composée $f(g(x))$ est

$$\Big(f(g(x))\Big) = f'\Big(g(x)\Big)g'(x).$$

Voyons pourquoi cette forme de la règle de chaine n'est qu'une reformulation de 12. Si on pose que $z = f(g(x))$ et que $y = g(x)$, on a que $z = f(y)$. En appliquant la règle de chaine, on a que

$$\Big(f(g(x))\Big)' = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

Comme $\frac{dy}{dx} = g'(x)$ et $\frac{dz}{dy} = f'(y)$, on doit avoir que

$$\Big(f(g(x))\Big)' = f'(y)g'(x)$$

Enfin, on substitue $y = g(x)$, dans cette dernière égalité pour exprimer la dérivée uniquement en fonction de x :

$$\Big(f(g(x))\Big) = f'(g(x))g'(x).$$

Si on pose $u = g(x)$, on peut aussi écrire la règle de chaîne écrite de la manière suivante :

$$\big(f(u)\big)' = f'(u)u'.$$

Plusieurs formulaires de dérivations utilisent cette manière d'écrire.

Exemple 13. Soit la fonction définie par $z = (2x-3)^8$. On peut voit cette fonction comme la composée de la fonction $f(y) = y^8$ et $g(x) = 2x-3$. La dérivée de la composée de f et g est

$$\begin{aligned}\big(f(g(x))\big)' &= f'(g(x))g'(x)\\ &= f'(y)g'(x)\\ &= 8y^7(2x-3)'\\ &= 8(2x-3)^7(2)\\ &= 16(2x-3)^7\end{aligned}$$

Comme la règle de chaine est très souvent utilisée, on ne fait habituellement pas autant d'étapes dans le calcul d'une dérivé avec la règle de chaine. Le résultat d'un dérivée comme celle du dernier exemple peut être calculé et directement sans étapes intermédiaires — après un entrainement suffisant !

2.9 Utilisation de la règle de chaine à l'aide d'une variable intermédiaire

La manière suivante d'écrire la règle de chaine permet de simplifier le calcul de la dérivée en pratique. Si $u = g(x)$, alors

$$\big(f(u)\big)' = f'(u)u'$$

Exemple 14.

$$\begin{aligned}\big((x^2+1)^5\big)' &= \big(u^5\big)' && \text{si } u = x^2+1\\ &= 5u^4u' && \text{règle de chaine}\\ &= 5(x^2+1)^4(x^2+1)' && \text{car } u = x^2+1\\ &= 5(x^2+1)^4(2x)\\ &= 10x(x^2+1)^4\end{aligned}$$

Exemple 15.

$$\begin{aligned}\left(\frac{5}{(2x+1)^2}\right)' &= \big(5(2x+1)^{-2}\big)'\\ &= \big(5(u)^{-2}\big)' && \text{si } u = 2x+1\\ &= 5(-2)(u)^{-3}u' && \text{règle de chaine}\\ &= 5(-2)(2x+1)^{-3}(2x+1)' && \text{car } u = 2x+1\\ &= \frac{-10}{(2x+1)^3}(2) && \text{car } u' = 2\\ &= \frac{-20}{(2x+1)^3}\end{aligned}$$

En pratique, la variable intermédiaire u sera souvent choisie comme étant « main » au tableau ou « doigt » sur papier pour éviter d'écrire explicitement u à chaque dérivée. Cela permet de dériver efficacement des expressions simples à l'aide de la règle de chaine. Pour être à l'aise dans un contexte plus avancé où on doit bien maitriser le calcul différentiel, il faut pratiquer suffisamment pour dériver directement des fonctions simples comme dans le cas suivant :

$$\left(\left(3x^2+x+1\right)^4\right)' = 4\left(3x^2+x+1\right)^3(6x+1).$$

Exemple 16. On encadre ici la variable intermédiaire, sans la nommer.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{(5x^2+3x+1)^2}\right)' &= \left(\left(5x^2+3x+1\right)^{-2}\right)' \\
&= \left(\left(\boxed{5x^2+3x+1}\right)^{-2}\right)' \\
&= -2\left(\boxed{5x^2+3x+1}\right)^{-3}\left(\boxed{5x^2+3x+1}\right)' && \text{Règle de chaine} \\
&= \frac{-2}{\left(\boxed{5x^2+3x+1}\right)^3}(10x+3) \\
&= \frac{-2(10x+3)}{(5x^2+3x+1)^3}
\end{aligned}$$

Exemple 17.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^3+x+1}\right)' &= \left(\sqrt{\boxed{x^3+x+1}}\right)' \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\boxed{x^3+x+1}}}\left(\boxed{x^3+x+1}\right)' && \text{Règle de chaine} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{\boxed{x^3+x+1}}}\left(3x^2+1\right) \\
&= \frac{3x^2+1}{2\sqrt{x^3+x+1}}
\end{aligned}$$

Résumé

3 Application de la règle de chaîne : dérivation implicite

Il est possible de définir une fonction par une équation. Par exemple :

$$y = \frac{1}{x} \qquad y = x^2$$

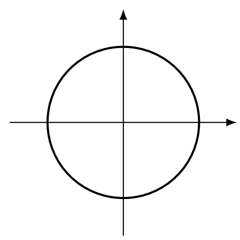
On pourrait aussi définir ces fonctions par les équations suivantes

$$xy = 1 \qquad x^2 - y = 0.$$

Dans une telle définition implicite, il faut cependant spécifier quelle variable est fonction de l'autre. Par habitude, nous prenons souvent y comme fonction de x.

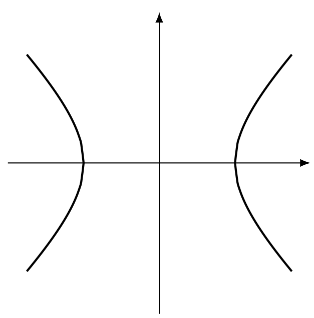
Nous savons cependant qu'une équation ne peut pas toujours être vue comme une définition implicite d'une fonction. Par exemple l'équation du cercle de rayon 1

$$x^2 + y^2 = 1$$



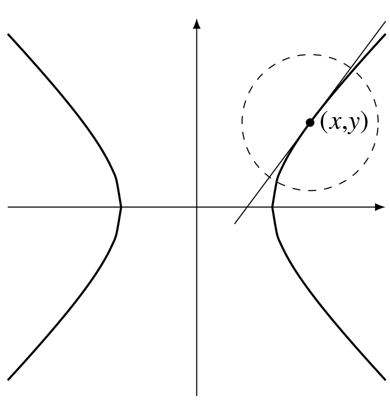
ou encore celle d'une hyperbole

$$x^2 - y^2 = 1$$



Même si ces équations établissent des relations entre les variables x et y sans que ces relations soient des fonctions, il est possible de déterminer la pente des tangentes à ces courbes à l'aide de la dérivée en supposant qu'il est possible *localement* de supposer que ces courbes sont le graphe d'une fonction définie implicitement, c'est-à-dire que si on limite la courbe à une section assez petite de la courbe près d'un point de tangence, cette section peut être décrite par une fonction.

Exemple 18. Prenons l'hyperbole définie par l'équation $x^2 - y^2 = 1$. On veut connaitre la pente de la tangente au point (x,y).



On suppose que localement y est une fonction de x, c'est-à-dire qu'a l'intérieur d'un cercle assez petit autour du point (x,y), la courbe définie par l'équation de l'hyperbole peut être considérée comme le graphe d'une fonction $y = f(x)$ — car à l'intérieur du cercle, pour chaque valeur de x il y a une seule valeur correspondante en y.

Comme le point (x,y) est sur la courbe, ses coordonnées doivent satisfaire l'équation

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Si on considère chaque membre de cette égalité comme une fonction, comme elles sont égale, en les dérivant ont doit obtenir le même résultat :

$$\left(x^2 - y^2\right)' = \left(1\right)'.$$

$$2x - 2yy' = 0.$$

Notez le « y' » : c'est la « dérivée de l'intérieur » dans l'application de la règle de chaine. En effet, on pourrait écrire y^2 comme $(f(x))^2$ puisque $y = f(x)$. En dérivant sous cette forme avec la règle de chaine on obtient

$$\left((f(x))^2\right)' = 2f(x)f'(x).$$

Comme $2f(x)f'(x) = 2yy'$, on voit que la dérivée de y^2 *par rapport à* x est bien $2yy'$.

Enfin, on isole y' dans l'égalité $2x - 2yy' = 0$ pour obtenir une expression donnant la pente de la tangente en fonction des coordonnées x et y du point (x,y) :

$$y' = \frac{-2x}{-2y} = \frac{x}{y}$$

On peut utiliser ce résultat pour déterminer la pente de la tangente au point $\left(2, \sqrt{3}\right)$. On vérifie que ce point est bien sur l'hyperbole :

$$2^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1.$$

(Si le point n'était pas sur l'hyperbole, l'hypothèse de départ de ce calcul serait fausse et la conclusion $y' = \frac{x}{y}$ le serait aussi !)

La pente de la tangente au point donné est donc

$$y' = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Exemple 19. Déterminons la pente de la tangente à la courbe définie par l'équation

$$x^3 + xy = 1$$

au point (1,0).

Premièrement, vérifions que le point (1,0) est bien sur la courbe : c'est le cas car en substituant les coordonnées $x = 1$ et $y = 0$ dans l'équation, l'égalité est vraie :

$$(1)^3 + (1)(0) = 1.$$

Ensuite, on détermine la pente de la tangente $\frac{dy}{dx}$ en un point (x,y) quelconque de la courbe. On suppose que près du point (x,y), la courbe peut être décrite par une fonction $y = f(x)$. Dans ce cas, on peut déviver chaque membre de l'équation définissant la courbe

$x^3 + xy = 1$	Équation de la courbe
$\left(x^3 + xy\right)' = \left(1\right)'$	Dérivée de chaque membre de l'égalité
$\left(x^3\right) + \left(xy\right)' = \left(1\right)'$	Dérivée d'une somme
$3x^2 + (x)'y + xy' = 0$	Dérivée d'un produit et d'une constante
$3x^2 + y + xy' = 0$	$(x)' = 1$

On isole $y' = \frac{dy}{dx}$ dans cette dernière égalité :

$$3x^2 + y + xy' = 0 \implies y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + y}{x}.$$

La pente de la tangente au point (1,0) peut enfin être calculée en substituant $x = 1$ et $y = 0$ dans cette dernière expression :

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(x,y)=(1,0)} = -\left.\frac{3x^2 + y}{x}\right|_{x=1,y=0} = -\frac{3(1)^2 + (0)}{(1)} = -3.$$

3.1 Dérivation implicite pour trouver des formules de dérivations

On peut utiliser la dérivation implicite dans les preuves de certaines propositions — cela arrivera à plusieurs reprise dans la suite du cours. Voyons un exemple typique : démontrons la formule permettant de dériver une puissance fractionnaire de x.

Proposition 13.

$$\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Démonstration. On a la relation suivante :

$$\left(x^{1/n}\right)^n = x.$$

Si on dérive chaque membre de cette égalité, on a

$$\left(\left(x^{1/n}\right)^n\right)' = (x)',$$

c'est-à-dire, en utilisant la règle de chaine pour dériver le membre de gauche :

$$n\left(x^{1/n}\right)^{n-1}\left(x^{1/n}\right)' = 1.$$

On isole la dérivée recherchée :

$$\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n\,(x^{1/n})^{n-1}}.$$

On simplifiant le résultat obtenu, on trouve enfin la formule désirée :

$$\left(x^{1/n}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}.$$ □

En combinant cette dernière formule de dérivation avec la règle de chaine, on peut enfin démontrer que le schéma général de dérivation $(x^q)' = qx^{q-1}$ est valable pour les puissances rationnelles.

Proposition 14. La formule de dérivation d'une puissance

$$\frac{d\left(x^q\right)}{dx} = qx^{q-1}$$

est valable pour tout nombre rationnel q.

Démonstration. Si $q = \frac{n}{m}$ est un nombre rationnel quelconque, alors

$$
\begin{aligned}
(x^q)' &= \left(x^{n/m}\right)' \\
&= \left((x^n)^{1/m}\right)' && \text{Propriétés des exposants} \\
&= \frac{1}{m}(x^n)^{\frac{1}{m}-1}(x^n)' && \text{Règle de chaine} \\
&= \frac{1}{m}(x^n)^{\frac{1}{m}-1}\left(nx^{n-1}\right) && \text{Dérivée d'une puissance} \\
&= \frac{n}{m}(x^n)^{\frac{1}{m}-1}x^{n-1} && \frac{1}{A}BC = \frac{B}{A}C \\
&= \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-n}x^{n-1} && \text{Propriétés des exposants} \\
&= \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-n+n-1} && \text{Propriétés des exposants} \\
&= \frac{n}{m}x^{\frac{n}{m}-1} && A - A = 0 \\
&= qx^{q-1}. && q = \frac{n}{m}
\end{aligned}
$$

□

Résumé

4 Application de la règle de chaîne : taux liés

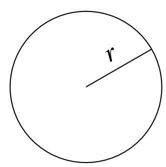
La règle de chaine permet l'étude de taux de variation de variables liées entre elles par une relation, comme dans la section précédente. Si y dépend de x qui dépend du temps t, alors y dépend du temps. La relation entre les taux de variations de y de x par rapport au temps est donnée par la règle de chaîne :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}.$$

Cette relation permet de déterminer le taux de variation de y par rapport au temps à partir du taux de variation de x par rapport au temps (ou réciproquement) si on connait la fonction qui lie x et y.

Exemple 20. Imaginons un cercle dont le rayon r varie dans le temps. Si le rayon varie, l'aide du cercle doit varier elle aussi car les deux quantités sont reliés par l'équation

$$A = \pi r^2.$$



On a donc une situation où l'aire A est fonction du rayon r, lui-même fonction du temps. Pour connaitre le taux de variation de l'aire en fonction du temps, on utilise la règle de chaine :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr}\frac{dr}{dt}$$
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

Si le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de 55 cm/s et que le rayon du cercle est de 10 cm, le taux de variation de l'aire est

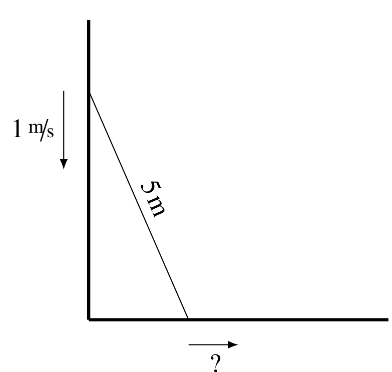
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=10\,\mathrm{cm}}(5\,\mathrm{cm/s}) = 2\pi(10\,\mathrm{cm})(5\,\mathrm{cm/s}) = 100\pi\,\mathrm{cm^2/s} \approx 314.16\,\mathrm{cm^2/s}.$$

Notons que pour le taux de variation du rayon $\frac{dr}{dt}$ est de 55 cm/s et que le rayon du cercle est différent, par exemple de 100 cm, le taux de variation de l'aire est

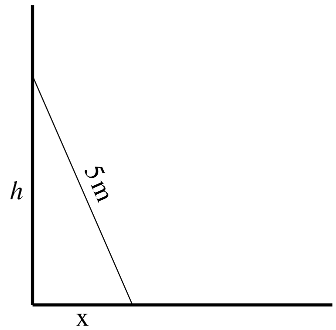
$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r|_{r=100\,\mathrm{cm}}(5\,\mathrm{cm/s}) = 2\pi(100\,\mathrm{cm})(5\,\mathrm{cm/s}) = 1000\pi\,\mathrm{cm^2/s} \approx 3141.59\,\mathrm{cm^2/s}$$

On voit que le taux de variation de l'aire dépend du rayon du cercle. On explique cela géométriquement par le fait que pour un petit cercle, un accroissement de son rayon de 5 cm aura un grand effet sur l'aire, alors que pour un grand cercle, un même accroissement du rayon aura peu d'effet sur l'aire.

Exemple 21. *Une poutre de 5 m de longueur glisse le long d'un mur vertical ; le point de contact entre la poutre et le mur descend vers le sol à une vitesse de 1 m/s. À quel vitesse le point de contact de la poutre avec le sol s'éloigne-t-il du mur quand sa distance au mur est de 3 m ?*



On commence par trouver la relation entre la hauteur h de l'échelle le long du mur et la distance x entre le pied de l'échelle et le mur.



La relation entre la hauteur h et la distance x est donnée par la relation de Pythagore :

$$h^2 + x^2 = 5^2$$

On peut déterminer h en fonction de x ou inversement car on ne considère que les hauteur et distance positives. On trouve en isolant

$$h = \sqrt{25 - x^2} \text{ et } x = \sqrt{25 - h^2}.$$

La donnée du problème nous indique que la vitesse à laquelle descend le haut de l'échelle est -1 m/s (comme h décroit, la vitesse doit être négative) :

$$\frac{dh}{dt} = -1$$

On cherche la vitesse de croissance de x, c'est-à-dire $\frac{dx}{dt}$.

Par la règle de chaîne, on a la relation suivante entre ces deux vitesses :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dh}\frac{dh}{dt}.$$

On peut calculer $\frac{dx}{dh}$ à l'aide des formules de dérivation :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dh} &= \frac{d}{dh}\left(\sqrt{25 - h^2}\right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{25 - h^2}}(-2h) \\
&= -\frac{2h}{2\sqrt{25 - h^2}} \\
&= -\frac{h}{\sqrt{25 - h^2}}
\end{aligned}$$

On a donc que

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{h}{\sqrt{25 - h^2}}\frac{dh}{dt}.$$

Quand $x = 3\,\text{m}$, la hauteur est

$$h = \sqrt{25 - (3)^2} = 4.$$

On substitue cette valeur et la valeur donnée de $\frac{dh}{dt}$ dans la relation trouvée :

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\left.\frac{h}{\sqrt{25 - h^2}}\right|_{h=4} \frac{dh}{dt} \\
&= -\frac{4}{\sqrt{25 - 4^2}}(-1) \\
&= \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Le bas de la poutre s'éloigne donc du mur à $\frac{4}{3}$ m/s.

Résumé

5 Dérivée d'ordre supérieur

Le « taux de changements du taux de changement » est une autre quantité importante pouvant nous donner de l'information sur le comportement d'une fonction. En dynamique, elle correspond à l'**accélération**, qui est le taux de changement de la vitesse, elle même le taux de changement de la position.

Comme le taux de changement d'une fonction un point de son graphe est donnée par la dérivée de la fonction, le taux de changement du taux de changement est donnée par la *dérivée de la dérivée*. On peut voir la dérivée d'une fonction comme une nouvelle fonction, que l'on peut dériver elle aussi.

Par exemple, si on prend $f(x) = x^3$, le taux de changement est donnée par $f'(x) = 3x^2$. Le taux de changement de f' est donc donné par la **dérivée seconde** $f''(x) = 6x$.

Définition. On appelle **dérivée seconde** d'une fonction la dérivée de sa dérivée

$$f''(x) \stackrel{\text{def}}{=} (f'(x))'.$$

On défini de manière similaire la **dérivée troisième** $f'''(x) = \left(f''(x)\right)'$, la **dérivée quatrième** $f''''(x) = \left(f'''(x)\right)'$, etc.

On appelle ces dérivées les **dérivées d'ordre supérieur**.

Exemple 22. Calculer la dérivée troisième de $f(x) = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sqrt{x} \\
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
f''(x) &= \left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-1/2}\right)' = -\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \\
f'''(x) &= \left(-\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\right)' = -\frac{1}{4}\left(x^{-3/2}\right)' = -\frac{1}{4}\left(\frac{-3}{2}\right)x^{-5/2} = \frac{3}{8\sqrt{x^5}}
\end{aligned}$$

Comme on peut répéter la dérivation autant de fois que l'on veut, l'accumulation de « ' » peut alourdir la notation. Il est plus pratique d'avoir une notation qui indique plus simplement le nombre de fois qu'une fonction est dérivée.

Définition.

$$\begin{aligned}
\text{Dérivée première :}\quad & f^{(1)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f'(x)\\
\text{Dérivée seconde :}\quad & f^{(2)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f''(x) = (f'(x))'\\
\text{Dérivée troisième :}\quad & f^{(3)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f'''(x) = \left(f^{(2)}(x)\right)'\\
\text{Dérivée quatrième :}\quad & f^{(4)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f''''(x) = \left(f^{(3)}(x)\right)'\\
\text{Dérivée cinquième :}\quad & f^{(5)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f^{(4)}(x)\right)'\\
& \vdots\\
\text{Dérivée } n\text{-ième :}\quad & f^{(n)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \left(f^{(n-1)}(x)\right)'
\end{aligned}$$

La dérivée d'ordre quelconque $f^{(n)}$ est appelée **dérivée** $\boldsymbol{n}$**-ième**.Par convention, la « dérivée 0-ieme » est la fonction elle même : $f^{(0)}(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)$.

Les dérivées d'ordre supérieur ont une notation dans toute les variantes de la notation pour la dérivée. Le tableau suivant offre un panorama de ces différentes notations.

Notations pour la dérivée seconde						
$f''(x)$	$f^{(2)}(x)$	y''	$\left(x^2\right)''$	$\dfrac{d^2y}{dx^2}$	$\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$	$\dfrac{d^2x^2}{dx^2}$
$f''(a)$	$f^{(2)}(a)$	$y''\|_{x=a}$	$\left(x^2\right)''\Big\|_{x=a}$	$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right\|_{x=a}$	$\left.\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}\right\|_{x=a}$	$\left.\dfrac{d^2x^2}{dx^2}\right\|_{x=a}$