Calcul différentiel — Limites

1 Définition du concept de limite

1.1 Notations pour les limites

Définition. On écrit $x \to a$ pour signifier que « x est aussi près que l'on veut de a ».

De même manière, on écrit que $f(x) \to L$ pour dire que « $f(x)$ aussi près que l'on veut de L en choisissant les bonnes valeurs de x. »

Une manière d'interpréter la notation $x \to 2$ par exemple, est d'imaginer une suite quelconque de nombre qui s'approche de 2. On pourrait par exemple considérer

$$2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \ldots$$

ou encore

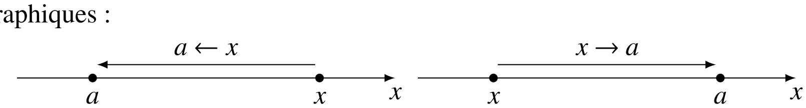
$$1.9, , 1.99, 1.999, \ldots$$

et même

$$2.1, 1.9, 2{,}01, 1.99, 2.001, 1.999, 2.0001, \ldots$$

Ainsi, on écrit $x \to 2$ pour dire « x s'approche de 2. »

Nous allons souvent représenter graphiquement le fait que $x \to a$ en ajoutant des flèches aux graphiques :



Exemple 1. Si x prend les valeurs 0,1, 0.01, 0,001, …, alors $x \to 0$.

Si x prend les valeurs 2,1, 2.01, 2,001, …, alors $x \to 2$.

Si x prend les valeurs 4.9, 4.99, 4,999, …, alors $x \to 5$.

Si x prend les valeurs 1.49, 1.499, 1.4999, …, alors $x \to \frac{3}{2}$.

Si x prend les valeurs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, …, alors $x \to 0$.

Définition. La notation $\lim_{x \to a} f(x) = L$ signifie :

> « $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \text{dom}(f)$ est assez près de a, mais différent de a. »

On peut aussi dire : $f(x) \to L$ si $x \to a$, $x \neq a$ et $x \in \text{dom}(f)$

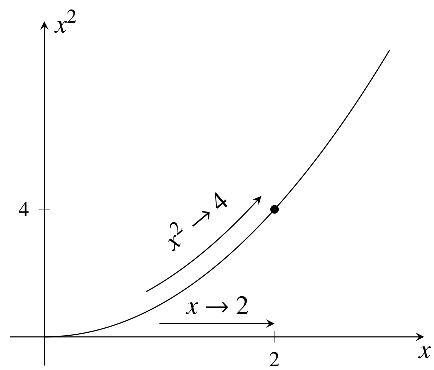
Note. Cette définition est difficile à utiliser, mais on peut la plupart du temps l'interpréter plus simplement comme suit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff f(x) \text{ s'approche de } L \text{ quand } x \text{ s'approche de } a.$$

Exemple 2.

$\lim_{x\to 3} x+1 = 4$	car $x+1$ s'approche de 4 quand x s'approche de 3
$\lim_{x\to 2} x^2 = 2$	car x^2 s'approche de 4 quand x s'approche de 2
$\lim_{x\to 0} x^3 = 0$	car x^3 s'approche de 0 quand x s'approche de 0
$\lim_{x\to 2} x = 2$	car x s'approche de 2 quand x s'approche de 2
$\lim_{x\to 5} 3 = 3$	car 3 s'approche de 3 quand x s'approche de 5

Dans chacun de ces cas, on peut représenter graphiquement le comportement de la fonction et de x dans la limite. Par exemple, pour $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$, on peut voir dans le graphique suivant que $x^2 \to 4$ quand $x \to 2$.

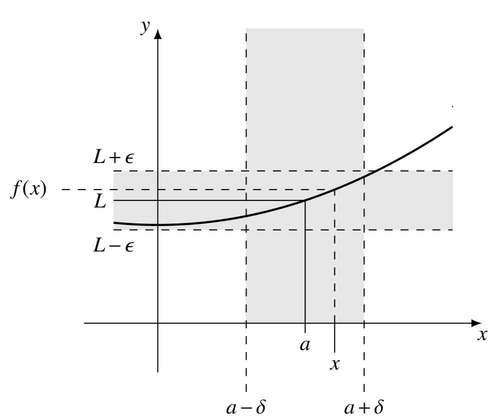


> **Remarque.** La spécification d'une limite ne dépend pas du nom de la variable utilisée comme argument de fonction. On peut la changer comme on veut : les expressions $\lim_{x\to a} f(x)$, $\lim_{y\to a} f(y)$ et $\lim_{z\to a} f(z)$ désignent toutes la même quantité : la limite de la fonction quand son argument tend vers a.
>
> Par exemple, les trois expressions $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$, $\lim_{y\to 2} y^2 = 4$ ou $\lim_{t\to 2} t^2 = 4$ ont la même signification.

Note. La définition donnée de limite peut sembler un peu imprécise. En mathématiques, on utilise normalement la définition précise suivante. Cependant, elle est difficile à utiliser directement car cela nécessite un grande habilité avec la logique et les inégalités.

Version habituelle en mathématique de la définition de limite (où $d(x,y) = |y - x|$ est la distance entre x et y) :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \overset{\text{def}}{\iff} \forall\epsilon > 0.\, \exists\delta > 0.\, d(x,a) < \delta \implies d(f(x),L) < \epsilon.$$



1.2 Existence d'une limite

Définition. On dit que la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ **existe** quand il y a un un nombre L tel que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

On peut aussi écrire « $\lim_{x\to a} f(x)\exists$ » pour dire que la limite existe sans spécifier la valeur de cette limite. Le symbole « $\exists$ » veut dire « existe ».

Définition. On dit qu'une limite **n'existe pas** quand il n'y a pas de nombre L tel que

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Autrement dit, la limite de $f(x)$ quand $x \to a$ n'existe pas s'il n'y a pas de nombre L tel que $f(x)$ puisse être aussi près de L que l'on veut si on prend des x assez près de a.

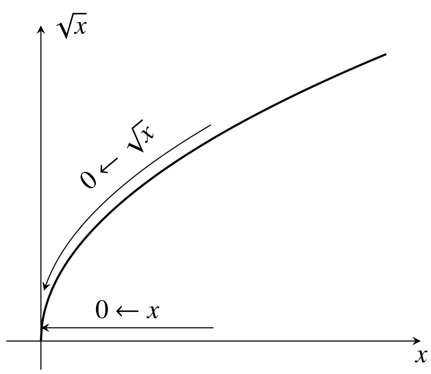
Quand un limite n'existe pas, on écrit « $\lim_{x\to a} f(x)\nexists$. »

Remarque. La condition $x \in \operatorname{dom}(f)$ dans la définition de limite () force les valeur de x à s'approcher de a uniquement par des valeur qui sont dans le domaine de f et différentes de a. Par exemple, quand on considère

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x},$$

on ne tient compte que des valeur positives ($x \geq 0$) de x car $\sqrt{x}$ n'est défini que pour ces valeurs. Dans ce cas, on a bien que

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0.$$



Dans certains cas, il est possible qu'il n'y ai aucun x dans le domaine de la fonction assez près de a. Par exemple, dans la limite

$$\lim_{x\to -2} \sqrt{x},$$

si x est assez près de -2, $\sqrt{x}$ n'est pas défini. Il est donc impossible que $f(x)$ s'approche d'une valeur L. On a alors que

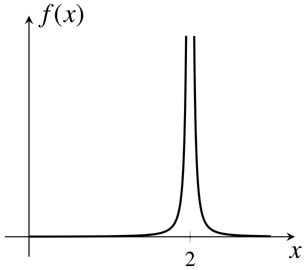
$$\lim_{x\to -2} \sqrt{x}\nexists.$$

1.2.1 Situations où une limite n'existe pas

Voici trois situations générales où une limite n'existe pas.

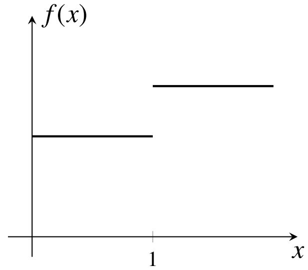
Si la valeur de la fonction devient indéfiniment grande ou petite. Dans ce cas, on écrit habituellement $\lim_{x\to 2} f(x) = \pm\infty$.

$\lim_{x\to 2} f(x) \nexists$



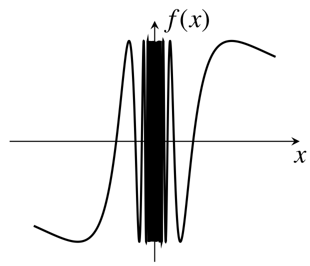
S'il y a un « saut » dans le graphe de la fonction faisant en sorte qu'en s'approchant d'un côté de a ou de l'autre, on trouverait des limites différentes.

$\lim_{x\to 1} f(x) \nexists$



Si la valeur de la fonction « oscille » entre différentes valeurs sans jamais s'approcher d'aucune valeur particulière.

$\lim_{x\to 0} f(x) \nexists$



Résumé

1.3 Déterminer intuitivement la limite d'une fonction

La limite de certaines fonctions peut être déterminée en observant le comportement des valeurs $f(x)$ quand on choisis des x de plus en plus près de a. Il faut cependant garder en tête que cette méthode intuitive n'est pas rigoureuse et ne garantit pas toujours de trouver le bon résultat si la fonction impliqué a un comportement complexe.

> **Remarque.** Dans la définition de limite, la *manière* de se rapprocher de a ne change rien à la limite. Peu importe comment x se rapproche de a, si la limite existe, $f(x)$ se rapproche toujours de la limite L.

Exemple 3. On veut déterminer la valeur de $\lim_{x\to 0} f(x)$ si $f(x) = 2x+1$. On prend des valeurs de x de plus en plus près de 0 (la colonne x du tableau suivant). Par chacune de ces valeurs, on calcule la valeur de $f(x)$.

x	$f(x)$
1.00000	3.00000
0.0312500	1.06250
0.00411523	1.00823
0.000976562	1.00195
0.000320000	1.00064
0.000128601	1.00026
0.0000594990	1.00012
0.0000305176	1.00006
0.0000169351	1.00003
0.0000100000	1.00002

On observe que quand $x \to 0$, $f(x) = 2x+1$ se rapproche de 1.

Notons que ce comportement ne dépend pas des nombres choisis : peut importe comment $x \to 0$, $f(x)$ se rapproche de 1. Dans le tableau suivant, on prend dès valeurs de x qui « oscillent » autour de la valeur centrale 0, mais de plus en plus près de 0. Les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus près de 1, même si elles ont parfois plus grande que 1, parfois plus petite que 1.

x	$f(x)$
0.0156250	1.03125
-0.00195312	0.996094
0.000578704	1.00116
-0.000244141	0.999512
0.000125000	1.00025
-0.0000723380	0.999855
0.0000455539	1.00009
-0.0000305176	0.999939
0.0000214335	1.00004
-0.0000156250	0.999969

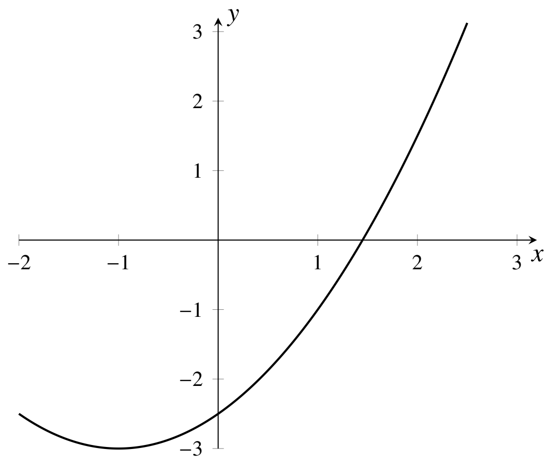
Notons enfin que $f(0) = 1$, c'est à dire que la valeur de la fonction en $x = 1$ coïncide avec la valeur dont s'approche $f(x)$ quand $x \to 0$.

Résumé

1.4 Évaluation d'une limite à l'aide d'un graphique

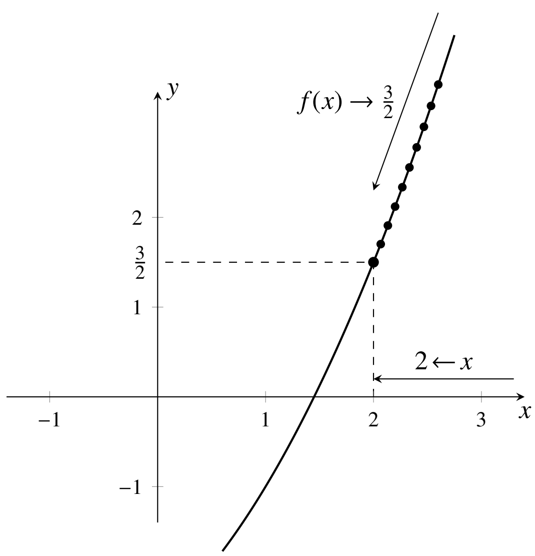
Si on connait le graphique d'une fonction, on peut souvent deviner la valeur de la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ en déterminant dans le graphique de quelle valeur s'approche $f(x)$ quand x s'approche de a.

Exemple 4. Le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 3$ est le suivant.



Ajoutons les points calculés dans le tableau suivant, en prenant une suite de valeurs de x telle que $x \to 2$.

x	$f(x)$
2.0080	1.5240
2.0046	1.5139
2.0029	1.5088
2.0020	1.5059
2.0014	1.5041
2.0010	1.5030
2.0008	1.5023
2.0006	1.5017
2.0005	1.5014
2.0004	1.5011



On voit sur le graphique que les valeurs de $f(x)$ sont de plus en plus proche de $3/2$. On a donc que

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \frac{3}{2}.$$

Cela est vrai peu importe comment la suite de valeurs de x s'approche de 2 : les valeurs de la fonction seront toujours de plus en plus près de $3/2$.

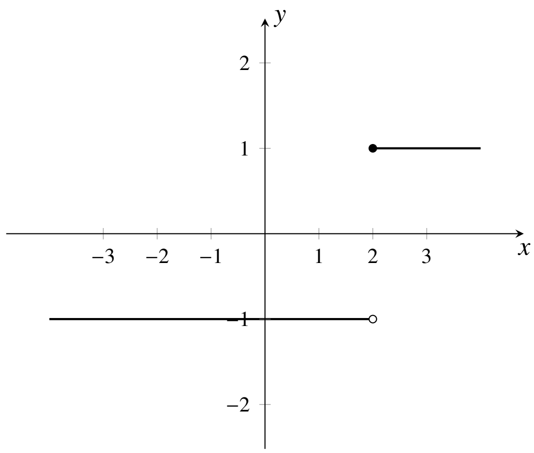
Résumé

1.5 Différence entre limite et valeur d'une fonction

En étudiant le dernier exemple, on pourrait penser que la limite d'une fonction quand $x \to a$ est toujours $f(a)$, comme dans les exemples suivants :

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 2} x^2 = 2^2\\
&\lim_{x\to -1} x^2 + 1 = (-1)^2 + 1\\
&\lim_{x\to 0} x^2 + x + 1 = 0^2 + 0 + 1\\
&\lim_{x\to 7} 3 = 3
\end{aligned}$$

Cependant, ce n'est pas toujours le cas. Les fonction où la limite ne coïncide pas avec la valeur de la fonction sont dites **discontinues**. Tentez par exemple de faire comme dans le dernier exemple pour deviner la valeur de la limite avec la fonction suivante.



Si on prend une suite de valeurs de x telle que $x \to 2$ et que $x > 2$, les valeurs de $f(x)$ s'approchent de 1 qui est $f(2)$. Cependant, si on prend une suite de valeurs de x qui s'approche de 2 mais telles que $x < 2$, alors les valeurs de $f(x)$ s'approchent de -1, qui n'est pas $f(1)$. Ainsi, on voit qu'il n'est pas toujours vrai que

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Résumé

1.6 Évaluation algébrique de limites

De manière générale, une limite peut être évaluée algébriquement en utilisant la définition algébrique de la fonction de la manière suivante

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Cependant, nous avons vu à à la section précédente que la valeur d'une limite quand $x \to a$ ne coïncide pas nécessairement avec la valeur $f(a)$ de la fonction en $x = a$.

Voici une liste des situations où nous supposons pouvoir évaluer une limite de cette manière.

> **Hypothèse.** Si f est une fonction polynômiale, rationnelle ou algébrique, alors
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
>
> pour toutes les valeurs de a où $f(a)$ est défini.

Exemple 5. Ces limites sont évaluée à l'aide de la dernière hypothèse car les fonctions impliqués sont définie pour $x = 3$, $x = -1$ et $x = 4$ respectivement.

$$\lim_{x \to 3} x^3 - x^2 + 1 = (3)^3 - (3)^2 + 1 = 19$$

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+1}{x+2} = \frac{(-1)^2+1}{(-1)+2} = \frac{2}{-1} = -2$$

$$\lim_{x \to 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$$

Par contre, on ne peut pas évaluer les limites suivantes avec l'hypothèse car les fonctions impliquées ne sont pas définie, ce que l'ont voit en tentant de les évaluer.

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^2+1}{x+2} \stackrel{?}{=} \frac{(-2)^2+1}{(-2)+2} = \cancel{\frac{5}{0}}$$

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{x-3} \stackrel{?}{=} \sqrt{1-4} = \cancel{\sqrt{-2}}$$

Nous analyserons plus loin les situations où il n'est pas possible d'évaluer une limite algébriquement en évaluant la fonction.

Résumé

1.7 Composition de fonction

Quand on doit déterminer la limite d'une fonction composée comme $f \circ g$, la limite de la composition est trouvée à l'aide du résultat suivant.

Proposition 1. Si la limite $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe, on peut poser $b = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. On a alors que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y).$$

Démonstration. Supposons que la limite $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existe, et posons $b = \lim\limits_{x\to a} g(x)$ et $y = g(x)$. Il faut montrer que

$$\lim_{y\to b} f(y) = \lim_{x\to a} f(g(x)).$$

Quand $x \to a$, $y = g(x) \to b$ par définition de b. Les limites $\lim\limits_{y\to b} f(y)$ et $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ sont donc égales. Comme la variable utilisée comme argument de fonction dans une limite n'a pas d'importance,

$$\lim_{x\to b} f(g(x)) = \lim_{y\to b} f(y) = \lim_{x\to b} f(x). \qquad \square$$

Exemple 6. On peut évaluer

$$\lim_{x\to 2}(x+1)^2$$

en considérant la fonction donnée comme la composition de $f(x) = x^2$ et de $g(x) = x + 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 2}(x+1) = 3$, on peut remplacer la limite originale en utilisant la dernière proposition :

$$\lim_{x\to 2}(x-1)^2 = \lim_{y\to 3} y^2.$$

Exemple 7.

$$\lim_{x\to 3} \sqrt{x-2} = \lim_{y\to 1} \sqrt{y} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = \lim_{y\to \sqrt{2}} \frac{y}{y+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}.$$

Résumé

1.8 Fonctions différentes ayant la même limite

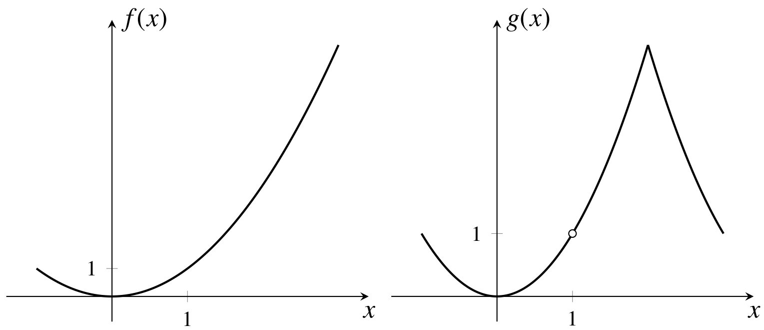
Deux fonctions peuvent être globalement différentes, mais identiques dans certaines régions. Un principe très important pour évaluer algébriquement des limites (c'est à dire sans l'aide d'un tableau de valeurs ou d'un graphique), est de remplacer une fonction pour laquelle l'évaluation d'une limite est problématique par une autre pour laquelle la limite est plus facile à déterminer.

Nous faisons du même coup l'hypothèse que la valeur de la limite $\lim_{x\to a} f(x)$ ne dépend pas du comportement de la fonction loin de $x = a$, mais uniquement des valeurs de $f(x)$ assez proche de $x = a$.

Hypothèse (Principe de localité)**.** Si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq a$ assez près de a, sauf peut-être en $x = a$, et si la limite du membre de droite existe, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x).$$

Exemple 8. Soient $f(x)$ et $g(x)$ les deux fonctions ayant les graphes suivants.



Selon le principe de localité, les deux limites

$$\lim_{x\to 1} f(x) \qquad \lim_{x\to 1} g(x)$$

ont la même valeur car si $x \to 1$, $f(x)$ et $g(x)$ s'approchent tout le deux de 1, même si $g(x)$ n'est pas définie en $x = 1$ et que $g(x) \neq f(x)$ pour certaines valeurs loin de $x = 1$.

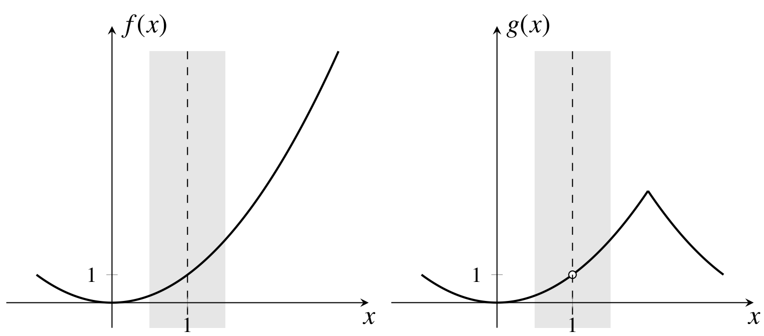
Autrement dit, la limite

$$\lim_{x\to 1} g(x)$$

est la même que la limite

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

car $f(x) = g(x)$ pour toutes les valeurs de x assez proches de $x = 1$ mais différentes de $x = 1$. On peut voir cela dans en comparent les graphes de f et g : les graphes sont identiques partout dans la zone grisée près de $x = 1$ et la valeur $x = 1$ n'a pas d'importance pour déterminer la limite.



Résumé

2 Limites à gauche et limites à droite

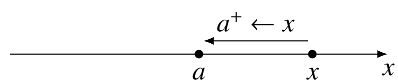
2.1 Définition des limites à gauche et à droite

Nous avons vu qu'une des situations faisant qu'une limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas est celle où faire s'approcher x de a par la gauche ou par la droite ne donne pas le même résultat. Pour étudier plus précisément ce type de situation, nous introduisons une version de la notion de limite où les valeurs de x sont contraintes à être « à gauche » ou « à droite » de a.

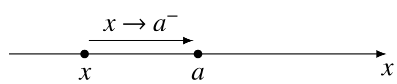
Les limites à gauche sont définies comme les limites en général, mais en limitant les valeurs possible de x « à gauche » de a, c'est à dire telle que $x < a$. On peut aussi limiter les valeurs de x « à droite » de a, donc telle que $x > a$.

On écrit $x \to a^-$ pour dire que x se rapproche de a par des valeurs plus petites que a. De même, on écrit $x \to a^+$ pour dire que x se rapproche de a par des valeurs plus grandes que a. On représente graphiquement ces situations de la manière suivante.

x s'approche de a par la droite ($x > a$)



x s'approche de a par la gauche ($x < a$)



Définition.

Limites à droite La notation $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ signifie :

« $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \mathrm{dom}(f)$ est assez près de a avec $x > a$. »

Limites à gauche La notation $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ signifie :

« $f(x)$ peut être aussi près de L que l'on veut si $x \in \mathrm{dom}(f)$ est assez près de a avec $x < a$. »

Note. On peut aussi utiliser la notation plus explicite suivante

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) \text{ pour dire } \lim_{x\to a^-} f(x).$$

De même, on peut aussi utiliser la notation suivante

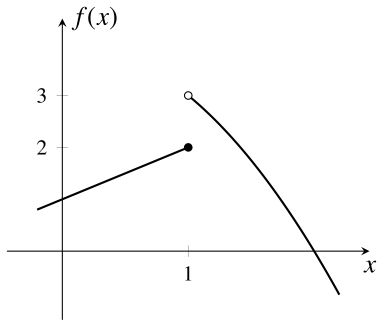
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) \text{ pour dire } \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Résumé

2.2 Évaluation graphique des limites à gauche et à droite

Les limites à gauche et à droite s'évaluent graphiquement comme les limites en général, mais en considérant uniquement la partie du graphique limitée par la restriction donnée.

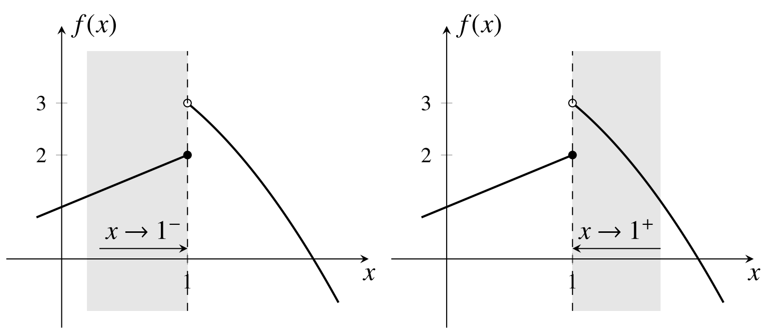
Exemple 9. Soit f la fonction ayant le graphe suivant.



Dans ce graphe, on a que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2 \text{ et } \lim_{x\to 1^+} f(x) = 3,$$

ce qu'on peut déterminer en ne considérant que la partie du graphe près de $x = 1$ à gauche ou à droite de $x = 1$:



La valeur de la fonction en $x = 1$ n'a aucun impact sur le résultat de ces limites, seul importe le comportement de la fonction près de $x = 1$.

Résumé

2.3 Évaluation algébrique de limites à gauche et à droite

Exemple 10. Soit f la fonction définie par morceau de la manière suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } 2 < x \\ x^2 & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ 2x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Pour évaluer la limite de $f(x)$ quand $x \to 2^+$, on utilise le principe de localité : ce qui détermine la limite, c'est le comportement de f quand $x > 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 2\\ x>1}} f(x) \\ &= \lim_{x\to 2^+} 3 && \text{car } f(x) = 3 \text{ pour } 2 < x \\ &= 3. \end{aligned}$$

Pour évaluer la limite de $f(x)$ quand $x \to 1^-$, on utilise aussi le principe de localité : ce qui détermine la limite, c'est le comportement de f quand $x < 2$. Cette fois-ci, on doit considérer les valeurs de x les plus proches de 2, donc celle de l'intervalle $[1,2]$ où $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^-} f(x) &= \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} f(x) \\ &= \lim_{x\to 2^+} x^2 && \text{car } f(x) = x^2 \text{ pour } 1 \le x \le 2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Résumé

2.4 Limites à gauche et à droite et composition de fonctions

La propriété 1 s'applique aux limites à droites et à gauche dans certaines conditions.

Par exemple, $\lim\limits_{x\to a^+} f(g(x)) = \lim\limits_{x\to b^+} f(x)$ si $b = \lim\limits_{x\to a^+} g(x)$.

On utilise habituellement les notations suivantes :

« $f(b^+)$ » pour $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ quand $g(x) \to b^+$ quand $x \to a^+$;
« $f(b^-)$ » pour $\lim\limits_{x\to a} f(g(x))$ quand $g(x) \to b^-$ quand $x \to a^+$.

Il faut donc pouvoir déterminer de quelle manière $g(x)$ approche de b quand $x \to a^+$. On peut par exemple utiliser le résultat suivant et la factorisation :

Proposition 2.

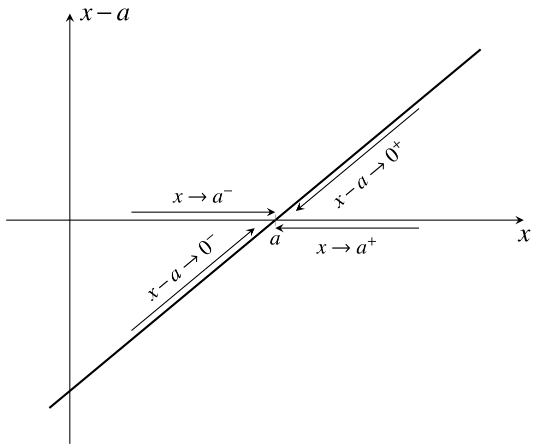
$$\lim_{x\to a^+} x - a = 0^+$$

$$\lim_{x\to a^-} x - a = 0^-$$

On peut ainsi écrire que

$$(a^+ - a) = 0^+ \text{ et } a^- - a) = 0^-.$$

On peut comprendre ces égalités à l'aide du graphique de la fonction définie par $y = x - a$. On voit dans le graphe que si $x \to a^-$, alors $x - a \to 0^-$ et si $x \to a^+$, alors $x - a \to 0^+$.



Exemple 11.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5^+} \sqrt{x-5} &= \sqrt{5^+-5}\\ &= \sqrt{0^+}\\ &= 0\end{aligned}$$

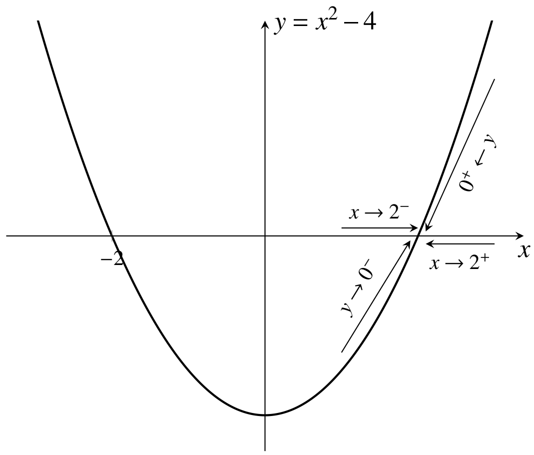
$$\lim_{x\to 5^-} \sqrt{x-5} = \sqrt{5^- - 5} = \sqrt{0^-} \nexists.$$

Exemple 12.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^+} \sqrt{x^2-4} &= \lim_{x\to 2^+} \sqrt{(x-2)(x+2)}\\ &= \sqrt{(2^+-2)(2^++2)}\\ &= \sqrt{(0^+)(4)}\\ &= \sqrt{0^+}\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2^-} \sqrt{x^2-4} &= \lim_{x\to 2^-} \sqrt{(x-2)(x+2)}\\ &= \sqrt{(2^--2)(2^-+2)}\\ &= \sqrt{(0^-)(4)}\\ &= \sqrt{0^-}\\ &= \nexists\end{aligned}$$

On peut mieux comprendre pourquoi $\lim_{x\to 2^-} x^2-4 = 0^-$ et $\lim_{x\to 2^+} x^2-4 = 0^+$ à l'aide du graphe de $y = x^2-4$.



On voit dans ce graphe que les valeurs de y sont plus petites que 0 quand $x \to 2^+$, donc que $y \to 0^-$.

Les relations suivantes peuvent aussi être utiles pour évaluer certaines limites de fonctions composés.

Proposition 3. Soient $C \in \mathbb{R}$ une constante et n un nombre naturel strictement positif. Alors

$$C0^+ = 0^+ \text{ si } C \text{ est positif}\,;$$
$$C0^+ = 0^- \text{ si } C \text{ est négatif}\,;$$
$$C0^- = 0^- \text{ si } C \text{ est positif}\,;$$
$$C0^- = 0^+ \text{ si } C \text{ est négatif}\,;$$
$$(0^-)^n = 0^+ \text{ si } n \text{ est pair.}$$

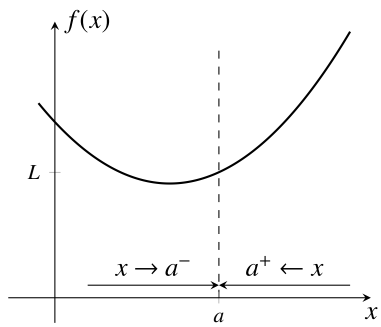
Résumé

2.5 Lien entre les limites et les limites à gauche et à droite

Le lien entre la limite et les limites à gauche et à droite a deux volets. Premièrement, si les limites à gauche et à droite existent et ont la même valeur, alors la limite existe. Deuxièmement, si les limites à gauche et à droite ont des valeurs différentes, alors la limite n'existe pas.

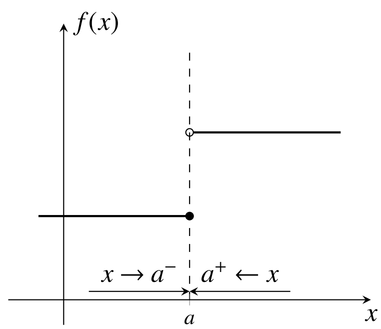
Hypothèse. Si les limites à droite et à gauche d'une fonction existent et sont égales, alors la limite de la fonction existe et a la même valeur.

$$\text{Si } \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L, \text{ alors } \lim_{x\to a} f(x) = L.$$



Si les limites à droite et à gauche existent mais n'ont pas la même valeur, alors la limite de la fonction n'existe pas.

$$\text{Si } \lim_{x\to a^+} f(x) \neq \lim_{x\to a^-} f(x), \text{ alors } \lim_{x\to a} f(x) \nexists.$$



La seconde de ces hypothèses est utile pour déterminer algébriquement si une limite existe dans le cas de fonctions définies par morceaux.

Exemple 13. Soit la fonction f définie de la manière suivante.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \geq 1 \\ (x+1)^2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Déterminons si la limite $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe.

D'une part, si $x \to 1$ par la droite, on a que

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} x^2 = 1^2 = 1.$$

Notez que nous utilisons ici le principe de localité pour remplacer $f(x)$ par x^2 quand $x \geq 1$, car les deux fonctions sont égales sur l'intervalle $[1,\infty[$ et ont donc les mêmes limites sur cette région.

D'autre part, si $x \to 1$ par la gauche, on a que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} (x+1)^2 = (1+1)^2 = 4$$

En comparant les deux résultats, on voit que

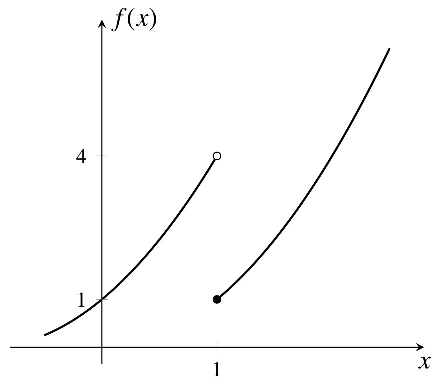
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) \neq \lim_{x \to 1^-} f(x),$$

et donc, par l'hypothèse **??**, la limite

$$\lim_{x \to 1} f(x)$$

n'existe pas.

Pour mieux comprendre l'argument algébrique, voici le graphe de la fonction f.



Résumé

3 Limites et continuité

Le concept de *continuité* permet de mieux comprendre pourquoi certaines limites n'existent pas.

On dit qu'une fonction est continue en un point si son comportement près de ce point permet de prédire la valeur de la fonction à ce point. Plus rigoureusement, on défini la continuité de la manière suivante.

Définition. Une fonction f est continue au point a si et seulement si

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a),$$

la limite existe et que $f(a)$ soit défini.

La continuité d'une fonction en $x = a$ est ce qui permet d'évaluer une limite « directement » en évaluant la fonction. C'est précisément ce que dit la définition de continuité : la valeur de la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ est $f(a)$.

Exemple 14. Si on suppose que $f(x) = x^2$ est continue en $x = 3$, la définition de continuité dit

$$\lim_{x\to 3} f(x) = f(3),$$

c'est à dire

$$\lim_{x\to 3} x^2 = 3^2.$$

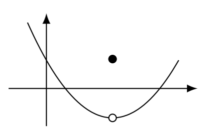
Proposition 4. Si une fonction n'est pas définie en $x = a$, elle n'est pas continue en $x = a$.

Exemple 15. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$. La fonction f n'est pas définie en $x = 3$ car il y a une division par zéro. Elle n'est donc pas continue en $x = 3$.

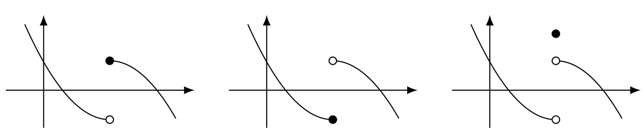
3.1 Différent types de discontinuités

On peut se servir de la définition de continuité (**??**) pour classifier les discontinuités : il y a quatre types de discontinuités :

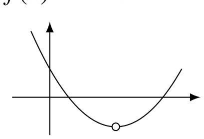
Type 1 $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$ mais la limite existe et $f(a)$ est définie.



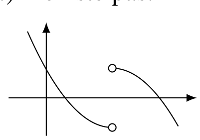
Type 2 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas mais $f(a)$ est défini.



Type 3 $f(a)$ n'est pas définie mais $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ existe.

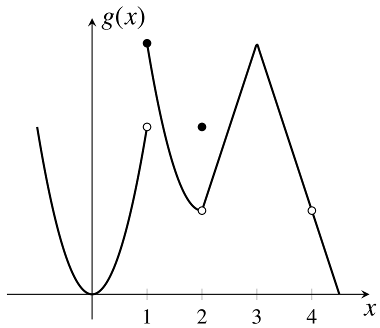


Type 4 $f(a)$ n'est pas définie et $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ n'existe pas.



Quand une fonction ait une discontinuité en $x = a$ qui ne peut pas être modifiée en fonction continue en a en modifiant la définition de $f(a)$ de manière à ce que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$, la discontinuité est dite **essentielle**. Dans le cas contraire, on dit que la discontinuité est **non-essentielle**. Les discontinuités non-essentielles sont celles où la limite $\lim_{x \to a} f(x)$ existe, c'est à dire celle de type 1 et 3.

Exemple 16. Soit la fonction f ayant le graphe suivant.



- f a une discontinuité de type 2 en $x = 1$.
- f a une discontinuité de type 1 en $x = 2$.
- f est continue en $x = 3$.
- f a une discontinuité de type 3 en $x = 4$.

La discontinuité en $x = 1$ est essentielle ; les discontinuités en $x = 2$ et $x = 4$ sont non-essentielles.

Résumé

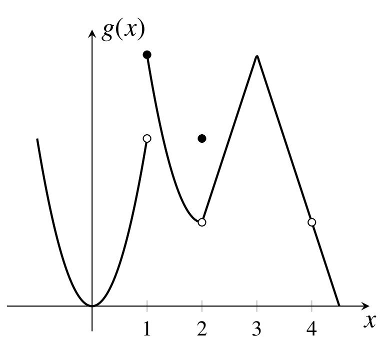
3.2 Continuité sur un intervalle

Définition. On dit qu'une fonction f est continue sur un ensemble $I \subseteq \mathbb{R}$ si elle est continue pour chaque x dans I.

Dans ce cours, l'ensemble I sera le plus souvent un intervalle comme $[a,b]$, $]a,b[$, $]a,b]$ ou $[a,b[$. L'ensemble I peut aussi être le domaine de la fonction f ($I = \text{dom}(f)$) ; si f est continue sur $\text{dom}(f)$, on dit que « f est continue sur son domaine. »

Comme une fonction n'est pas continue là où elle n'est pas définie, le domaine d'une fonction coïncide souvent avec l'ensemble des valeurs où une fonction est continue.

Exemple 17. Soit la fonction f ayant le graphe suivant.



La fonction f est continue sur chacun des intervalles $]2,4[$, $]-\infty,1[$, $]-1,1[$, $]1,2[$, etc.

La fonction f n'est pas continue sur chacun des intervalles $]1,3[$, $]-\infty,2]$, $]-\infty,1]$, $]1,2]$, $]1,2[$, etc.

Résumé

4 Propriétés des limites et continuité

4.1 Continuité des fonctions élémentaires

On peut préciser les hypothèses nécessaires pour déterminer algébriquement les limites en précisant quelles opérations de base on considère comme continue. On supposer les opérations suivantes continue : les constantes qui ne varient pas, la fonction identité, la somme, le produit et le quotient de deux fonctions.

Hypothèse. Propriétés axiomatiques des limites acceptées sans démonstration, mais motivées par l'intuition géométrique.

(AL1) Si une limite existe, elle est unique.

(AL2) $\lim\limits_{x\to a} C = C$ (C = constante)

(AL3) $\lim\limits_{x\to a} x = a$

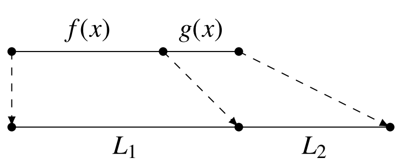
(AL4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$, si les deux limites du membre de droite existent.

(AL5) $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$, si les deux limites du membre de droite existent.

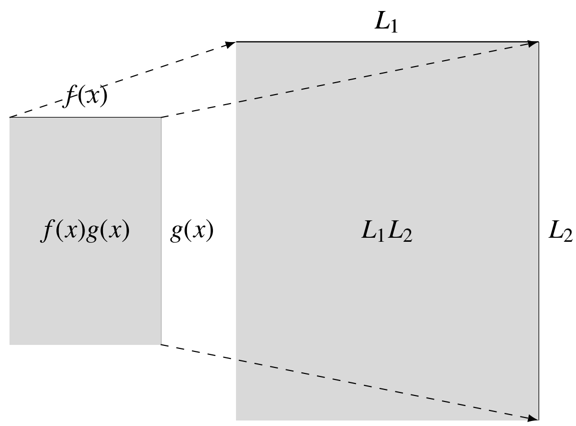
(AL6) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$, si les deux limites du membre de droite existent et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Si les hypothèses (AL1), (AL2) et (AL3) sont facile à motiver à partir de la définition de limite, les hypothèses (AL4), (AL5) et (AL6) sont plus facile à motiver sur la base de l'intuition géométrique.

Pour motiver (AL4), on suppose que les longueurs de deux segments sont $f(x)$ et $g(x)$; ce sont donc des longueurs variables en fonction de x. Si ces longueurs s'approchent respectivement de L_1 et L_2 quand $x \to a$, alors la somme de leurs longueurs s'approche de $L_1 + L_2$.



Pour motiver l'hypothèse **??**, on suppose que l'aire d'un rectangle dont les côtés $f(x)$ et $g(x)$ varient de manière continue en fonction de x varie elle aussi de manière continue.



Avec ces hypothèse minimales, on peut déduire ces autres propriétés.

Proposition 5. Les limites ont les propriétés suivantes, pouvant être déduites des propriétés axiomatiques.

(PL1) $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C\lim\limits_{x\to a} f(x)$ si la limite du membre de droite existe.

(PL2) $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$.

(PL3) $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$, où $P(x)$ est un polynôme.

(PL4) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{a}$ si $\sqrt[n]{a}$ est défini.

(PL5) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(a)}{Q(a)}$ quand $P(x)$ et $Q(x)$ sont des polynômes et quand $Q(a) \neq 0$.
(Les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaine)

Démonstration.

(PL1)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} Cf(x) &= \left(\lim_{x\to a} C\right)\left(\lim_{x\to a} f(x)\right) && (AL3)\\ &= C\lim_{x\to a} f(x) && (AL1)\end{aligned}$$

(PL2)
$$\begin{aligned}\lim_{x\to a} x^n &= \lim_{x\to a} \overbrace{x\cdots x}^{n \text{ fois}}\\ &= \overbrace{\left(\lim_{x\to a} x\right)\cdots\left(\lim_{x\to a} x\right)}^{n \text{ fois}}\\ &= \overbrace{a\cdots a}^{n \text{ fois}}\\ &= a^n\end{aligned}$$

(PL3) Comme un polynôme est une somme de monômes consistants en puissances de x multipliés par des constantes, on utilise (PL1), (PL2) et (AL3) pour démontrer l'égalité voulue.

La démonstration des autres propositions est laissée en exercice ! □

En résumé, on suppose que les fonctions rationnelles et algébriques sont continues partout où elles sont définies.

Résumé

5 Continuité et composition de fonctions

Proposition 6. La fonction f est continue en b si et seulement si

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

pour toutes les fonctions g telle que $\lim_{x\to a} g(x) = b$ existe.

Autrement dit, une fonction est continue en un point si et seulement si on peut « échanger la limite et la fonction » ou « la limite passe à travers la fonction. »

Exemple 18. Évaluons $\lim_{x\to 4} \sqrt{x-3}$ à l'aide du theorème **??**.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \sqrt{x-3} &= \sqrt{\lim_{x\to 4} x-3}\\
&= \sqrt{4-3}\\
&= \sqrt{1}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Exemple 19. Évaluons $\lim_{x\to 2}(x-1)^{100}$ à l'aide du theorème **??**.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2}(x-1)^{100} &= \left(\lim_{x\to 2} x-1\right)^{100}\\
&= (2-1)^{100}\\
&= 1^{100}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Preuve de la proposition 1. Supposons que f est continue en $b = \lim_{x\to a} g(x)$, c'est à dire que

$$\lim_{u\to b} f(u) = f(b).$$

Si g est une fonction telle que $\lim_{x\to a} g(x) = b$, on peut remplacer b par $\lim_{x\to a} g(x)$ et obtenir

$$\lim_{x\to b} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right).$$

Quand $x \to a$, $g(x) \to b$. On peut donc remplacer $\lim_{u\to b} f(x)$, en posant $u = g(x)$ qui s'approche de b quand x tend vers a. C'est une manière particulière de tendre vers a, mais comme on suppose que $\lim_{u\to b} f(u) = f(b)$ peu importe la manière que u s'approche de a, cette manière particulière ne change pas la limite qui est toujours $f(b)$. Ainsi

$$\lim_{u\to b} f(u) = \lim_{x\to a} f(g(x)).$$

En combinant ces résultats, on obtient le résultat voulu :

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} f(g(x))\right).$$

La réciproque est plus simple à démontrer. On suppose que

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to a} f(g(x))\right)$$

pour toute fonction g telle que $\lim_{x\to a} g(x)$ existe. On peut prendre le cas particulier $g(x) = x$, car la limite existe. L'hypothèse devient

$$\lim_{x\to a} f(x) = f\left(\lim_{x\to a} x\right).$$

Comme $\lim\limits_{x \to a} x = a$, on obtient que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

ce qui montre que f est continue en a. $\square$

Enfin, on démontre que la composition de deux fonctions continues est elle aussi continue.

Proposition 7. Si f et g sont deux fonctions continues, alors la composée $f \circ g$ est aussi continue et

$$\lim_{x \to a} f\Big(g(x)\Big) = f\Big(g(a)\Big).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} [f \circ g](x) &= \lim_{x \to a} f\Big(g(x)\Big) \\
&= f\Big(\lim_{x \to a} g(x)\Big) \quad \text{(par proposition 1 et } f \text{ continue)} \\
&= f\,(g(a)) \quad \text{(car } g \text{ continue)} \\
&= [f \circ g](a)
\end{aligned}$$

Ainsi, la composée $f \circ g$ est continue car $\lim\limits_{x \to a} [f \circ g](x) = [f \circ g](a)$. $\square$

Exemple 20. Comme les fonction $f(x) = x^3$ et $g(x) = x^2 + 1$ sont toutes deux des fonctions continues, leur composée

$$f(g(x)) = \left(x^2 + 1\right)^3$$

est aussi une fonction continue.

Résumé

5.1 Fonctions continues

À la section 1.6, nous avons fait l'hypothèse que les limites quand $x \to a$ des fonctions polynômiales, rationnelles et algébriques pouvaient être évaluées en évaluant la fonction en $x = a$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

On peut préciser cette hypothèse à l'aide des propriétés des limites. En combinant les hypothèses (AL1) à (AL6) et les propriétés (PL1) à (PL5) et le fait que la composition de fonctions continues est aussi continue (proposition **??**, on sait maintenant que toutes les fonctions obtenues en combinant des fonctions continues par composition, produits, quotients, puissances, racines, etc, sont elles aussi continues, tant que le résultat est défini.

Cela justifie donc l'hypothèse .

5.2 Limites et continuité des fonctions définies par morceaux

Rappel Une fonction définie par morceaux est une fonction dont la règle de définition comporte plusieurs cas mutuellement exclusifs.

En pratique, il faut vérifier si les trois conditions de la définition de continuité sont vérifiées. Il est généralement plus facile de le faire dans l'ordre suivant :

(1) Est-ce que $f(a)$ est défini ? Vérifier en évaluant.
(2) Est-ce que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe ? Vérifier à l'aide de l'hypothèse **??** si nécessaire.
(3) Est-ce que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$? Vérifier si les résultats obtenus aux deux premières étapes coïncident.

Si les trois conditions sont vérifiées, alors la fonction f est continue en $x = a$. Dès qu'une des conditions n'est pas vérifiée, la fonction n'est pas continue.

Pour évaluer une limite avec $x \to a$, ont vérifie dans quelle partie de la fonction on se trouve : est-ce que si x est assez près de a, x vérifie une des conditions ou se trouve plutôt à la « frontière » entre deux conditions ?

Exemple 21. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \\ 2x & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Comme la fonction f est définie par un polynôme si $x \neq 1$, f est continue pour toute valeur de $x \neq 1$. Est-ce que f est continue en $x = 1$?

Pour que f soit continue en $x = 1$, il faut que (1) $f(1)$ soit défini, (2) $\lim_{x\to 1} f(x)$ existe et que

$$(3) \quad \lim_{x\to 1} f(x) = f(1).$$

Par définition, $f(1) = 3$.

On vérifie $\lim_{x\to 1} f(x)$ à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x = 2(1) = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 = (1)^2 = 1$$

Comme la limite à droite (2) n'est pas égale à la limite à gauche (1), $\lim_{x\to 1} f(x) \nexists$ et f ne peut pas être continue en $x = 1$.

Exemple 22. Soit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 2 \\ -10 & \text{si } x = 2 \\ 2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Comme la fonction f est définie par un des polynômes x^2, x ou 2 si $x \neq 0$ et $x \neq 2$, f est continue pour toute valeur de $x \neq 0{,}2$. Est-ce que f est continue en en $x = 0$ et en $x = 2$?

En $x = 0$: $f(0) = 0^2 = 0$ est défini.

On vérifie si $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 = (0)^2 = 0$$

Comme la limite à droite est égale à la limite à gauche et on la même valeur 0, la limite $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Enfin, on a que
$$0 = \lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = 0;$$
la fonction est donc continue en $x = 0$.

En $x = 2$, on a que $f(2) = -10$ par définition.

On vérifie si $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe à l'aide des limites à droite et à gauche.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2 = 2$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} x = 2$$

Les deux limites existent et ont la valeur 2. On a donc que
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 2$$

La fonction n'est cependant pas continue en $x = 2$ car $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$ alors que $f(2) = -10$. On a donc que
$$\lim_{x\to 2} f(x) \neq f(2).$$

5.2.1 La fonction valeur absolue

Définition. La fonction **valeur absolue** est la fonction définie par morceaux de la manière suivante :
$$|x| \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ainsi, si on évalue $|3|$, comme $3 \geq 0$, c'est la première ligne de la définition qui doit être utilisée. Cela donne que $|3| = 3$.

Si on évalue plutôt $|-3|$, comme $-3 < 0$, c'est la seconde ligne de la définition qui doit être utilisée. Cela donne que $|-3| = -(-3) = 3$.

Exemple 23.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} |x| &= \lim_{x\to 2} x && \text{(principe de localité et car } |x| = x \text{ près de } x = 2) \\ &= 2 && \text{(par continuité)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to -3} |x| &= \lim_{x\to -3} -x && \text{(car } |x| = -x \text{ près de } x = -3) \\ &= -(-3) && \text{(par continuité)} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Pour évaluer $\lim_{x\to 0} |x|$, nous devons séparer la limite en limite à droite et limite à gauche car 0 est une valeur « frontière. »

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} |x| &= \lim_{x\to 0} x && \text{(car } |x| = x \text{ si } x \geq 0) \\ &= 0 && \text{(par continuité)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} |x| &= \lim_{x\to 0} -x && \text{(car } |x| = -x \text{ si } x < 0) \\ &= -0 && \text{(par continuité)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme les limites à gauche et à droite coïncident,

$$\lim_{x\to 0} |x| = 0.$$

Proposition 8 (Propriétés de la valeur absolue)**.**

$$\begin{aligned} |A| &\geq 0 \\ |AB| &= |A||B| \\ \left|\frac{A}{B}\right| &= \frac{|A|}{|B|} \end{aligned}$$

Exemple 24. Déterminons si la fonction

$$f(x) = \frac{\left|x^2-4\right|}{x-2}$$

est continue en $x = 2$.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{\left|x^2-4\right|}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{|(x-2)(x+2)|}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{|(x-2)|\,|(x+2)|}{x-2} \end{aligned}$$

On considère les limites à droites et à gauches $x \to 2^+$ et $x \to 2^-$ séparément, car $x-2$ change de signe en $x = 2$ et la fonction définie par morceau $|x-2|$ est donc définie différemment à gauche et à droite de $x = 2$.

Pour le cas $x \to 2^+$, on utilise le fait que si $x > 2$, alors $x-2 > 0$ et $|x-2| = x-2$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} \frac{|(x-2)|\,|(x+2)|}{x-2} &= \lim_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{|(x-2)|\,|(x+2)|}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-2)\,|(x+2)|}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} |x+2| \\ &= |2+2| \\ &= 4 \end{aligned}$$

Pour le cas $x \to 2^-$, on utilise le fait que si $x < 2$, alors $x-2 < 0$ et $|x-2| = -(x-2)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2^+} \frac{|(x-2)|\,|(x+2)|}{x-2} &= \lim_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{|(x-2)|\,|(x+2)|}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} \frac{-(x-2)\,|(x+2)|}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2^+} -|x+2| \\ &= -|2+2| \\ &= -4 \end{aligned}$$

Comme les limites à droite et à gauche ne coïncident pas, la limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{\left|x^2-4\right|}{x-2}$$

n'existe pas. La fonction f n'est donc pas continue en $x = 2$. est continue en $x = 2$.

Résumé

6 Indéterminations

6.1 Indéterminations de la forme « $\frac{0}{0}$ »

Une **indétermination** de la forme « $\frac{0}{0}$ » est une situation où, en évaluant la limite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

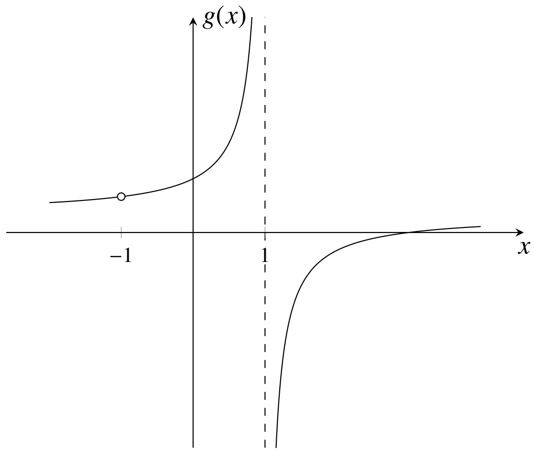
on trouve que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \; \frac{0}{0}.$$

Comme la fonction définie par $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'est pas définie en $x = a$, on ne peut pas utiliser l'hypothèse (AL6) pour déterminer la limite considérée car $\frac{f(x)}{g(x)}$ n'est pas continue en $x = a$.

Dans cette situation, les propriétés des limites que nous avons vu jusqu'ici ne permettent pas de déterminer la valeur de la limite (d'où le terme *indétermination* ou *forme indéterminée*).

Exemple 25. Considérer la fonction $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$.



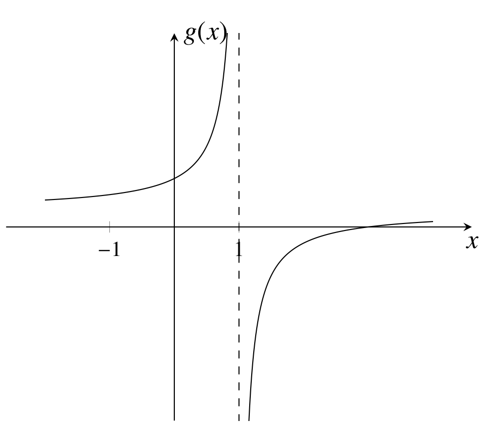
En factorisant le numérateur et le dénominateur de la fraction algébrique qui définie la fonction et en simplifiant, on trouve que

$$\frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}.$$

La fonction f n'est pas définie en $x = -1$ et en $x = 1$, car ces deux valeurs entrainent des divisions par zéro. Cependant, l'expression $\frac{x-3}{x-1}$ peut s'évaluer quand $x = 1$. Si on défini

$$g(x) = \frac{x-3}{x-1},$$

on a une nouvelle fonction qui a les mêmes valeurs que f, sauf quand $x = 1$. Son graphe est le suivant :



On a donc la situation suivante : les propriétés des limites vue précédemment ne permettent pas d'évaluer

$$\lim_{x\to -1} f(x).$$

parce qu'il y a une discontinuité. La discontinuité de la fonction f est cependant non-essentielle. En simplifiant le facteur commun à x^2-2x-3 et à x^2-1, on obtient une nouvelle fonction g. Comme les deux fonctions sont identiques sauf en $x=-1$, par le principe de localité on peut remplacer f par g pour évaluer la limite :

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} g(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x-3}{x-1} = \frac{(-1)-3}{(-1)-1} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Ces indéterminations « $\frac{0}{0}$ » sont dues à une discontinuité de la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$. Si cette discontinuité est non-essentielle, on peut « lever l'indétermination » en utilisant le principe de localité (hypothèse). On rappelle qu'intuitivement, cette hypothèse permet de remplacer dans une limite une fonction par un autre si les deux fonctions sont identiques près d'une valeur a. Cela permet de remplacer une fonction f discontinue en a par une fonction g continue en a qui a la même limite. Comme g est continue en a, la limite $\lim_{x\to a} g(x)$ s'évalue plus facilement que $\lim_{x\to a} f(x)$.

Résumé

6.2 Techniques algébriques pour lever les indéterminations

Pour utiliser le principe de localité pour lever une indétermination, il faut trouver une fonction pour remplacer celle causant l'indétermination ! Dans les indéterminations « $\frac{0}{0}$ », on peut trouver cette fonction de remplacement en simplifiant un facteur commun au dénominateur et au numérateur — le « facteur coupable » faisant en sorte que $f(a)=0$ et $g(a)=0$. Ce facteur est toujours de la forme $x-a$.

Dans le cadre de ce cours, il y aura trois techniques algébriques pour trouver le facteur commun à simplifier pour lever une indétermination « $\frac{0}{0}$ » :

- factoriser (utiliser le théorème de factorisation ou une identité connue) ;
- multiplier par le conjugué s'il y a des racines.
- mettre au dénominateur commun s'il y a des fractions.

Ces trois techniques ne permettent pas de lever toutes les indéterminations, car dans certains cas, on peut obtenir une forme « $0/0$ » sans que l'on puisse facilement trouver un facteur à simplifier. Par exemple, la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

est une indétermination « $\frac{0}{0}$ », mais comment trouver au numérateur un facteur x à simplifier avec le dénominateur ? Nous verrons plus loin que cette limite vaut 1. Cette limite est très importante en science (en physique en particulier) car elle permet d'approximer $\sin(x)$ par x quand on sait que x est près de 0.

Exemple 26. Déterminons la valeur de la limite

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^3-3x^2-6x+8}{x^3-3x^2-10x+24}$$

Premièrement, on a que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-3x^2-6x+8}{x^3-3x^2-10x+24} = \text{« } \frac{0}{0} \text{ »},$$

ce qui est bien une forme indéterminée « 0/0 ».

On simplifie le facteur commun $x-4$par factorisation polynomiale. On a que $x=4$ est un zéro des polynômes x^3-3x^2-6x+8 et $x^3-3x^2-10x+24$. Par le théorème de factorisation, on sait que $(x-4)$ est un facteur de chacun de ces deux polynôme. On trouve par division polynômiale que

$$x^3-3x^2-6x+8 = (x-4)(x^2+x-2) \text{ et } x^3-3x^2-10x+24 = (x-4)(x^2+x-6).$$

On utilise ces factorisation pour simplifier le facteur commun $x-4$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{x^3-3x^2-6x+8}{x^3-3x^2-10x+24} &= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(x^2+x-2)}{(x-4)(x^2+x-6)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(x-4)}(x^2+x-2)}{\cancel{(x-4)}(x^2+x-6)} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{x^2+x-2}{x^2+x-6} && \text{(principe de localité, hyp)} \\
&= \frac{4^2+4-2}{4^2+4-6} && \text{(continuité)} \\
&= \frac{9}{7}
\end{aligned}$$

Exemple 27. Déterminons la valeur de la limite

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}.$$

On commence par vérifier vérifie que l'on a bien une forme indéterminée « 0/0 » :

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \frac{4-4}{\sqrt{4}-2} = \text{« } \frac{0}{0} \text{ »}.$$

On utilise le conjugué de $\sqrt{x}-2$ pour éliminer la racine problématique et pouvoir simplifier le facteur $x-4$. En multipliant par le conjugué on doit avoir que $(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2) = (x-4)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} &= \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)(\sqrt{x}+2)}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}+2)}{\cancel{(x-4)}} \\
&= \lim_{x\to 4} \sqrt{x}+2 && \text{(principe de localité, hyp)} \\
&= \sqrt{4}+2 && \text{(continuité)} \\
&= 4
\end{aligned}$$

Exemple 28. Déterminons la valeur de la limite

$$\lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}{x-4}.$$

Il s'agit d'une forme indéterminée « 0/0 » :

$$\lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}{x-4} = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{4-4} = « \frac{0}{0} ».$$

On utilise la mise au dénominateur commun au numérateur pour pouvoir simplifier le facteur $x-4$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 4} \frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{4}}{x-4} &= \lim_{x\to 4} \frac{\frac{4-x}{4x}}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{4-x}{4x}\,\frac{1}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{-(x-4)}{4x}\,\frac{1}{x-4} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{-\cancel{(x-4)}}{4x}\,\frac{1}{\cancel{(x-4)}} \\
&= \lim_{x\to 4} \frac{-1}{4x} && \text{(principe de localité, hyp)} \\
&= -\frac{1}{16} && \text{(continuité)}
\end{aligned}$$

Résumé

7 Comparaisons de limites

Hypothèse. Si $f(x) \leq g(x)$ pour toutes valeurs de x assez près de a, on a que

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x)$$

quand ces deux limites existent.

On utilise souvent la conséquence suivante de la dernière hypothèse pour déterminer la valeur de certaines limites problématiques.

Théorème (des gendarmes ou du Sandwich)**.** Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ pour tout les x assez près de a, on a que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \implies \lim_{x\to a} g(x) = L$$

Démonstration. En utilisant l'hypothèse **??**, on a que

$$\lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} h(x).$$

Si $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, l'inégalité précédente devient

$$L \leq \lim_{x\to a} g(x) \leq L.$$

Comme le seul nombre à la fois plus grand et plus petit que L est L lui-même, on doit avoir que

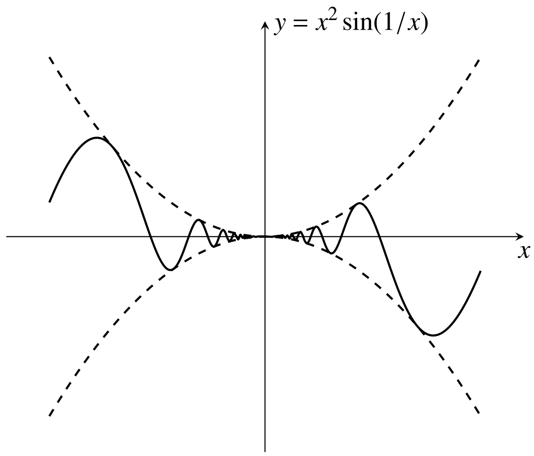
$$\lim_{x\to a} g(x) = L. \qquad \square$$

L'exemple suivant utilise la fonction sinus et le fait que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$. Nous définirons et étudierons en détail la fonction sinus plus loin.

Exemple 29. Évaluons la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

Sur ce graphique de la fonction $x^2 \sin(1/x)$, on voit que sont graphe est compris entre le graphe de $y = -x^2$ et celui de $y = x^2$.



Comme $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$, on doit avoir que

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2.$$

On doit donc avoir que

$$\lim_{x\to 0} -x^2 \leq \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq \lim_{x\to 0} x^2,$$

en évaluant on trouve que

$$0 \leq \lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0.$$

Il faut donc que

$$\lim_{x \to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$