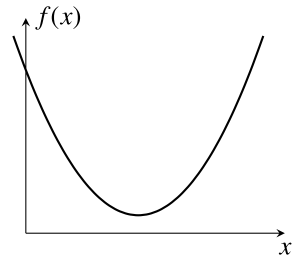
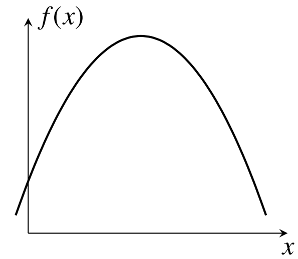
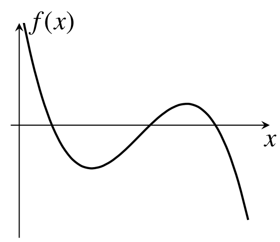
1 Concavité et points d’inflexion

1.1 Concavité

La **concavité** du graphe d’une fonction est relié à sa « courbure. » On peut intuitivement décrire la courbure comme mesurant à quel point un graphe n’est pas une droite. De plus, comme celui d’une parabole, le graphe d’une fonction peut être à certains endroits « courbé vers le haut » (convexe) ou ailleurs « courbé vers le bas » (convave) :

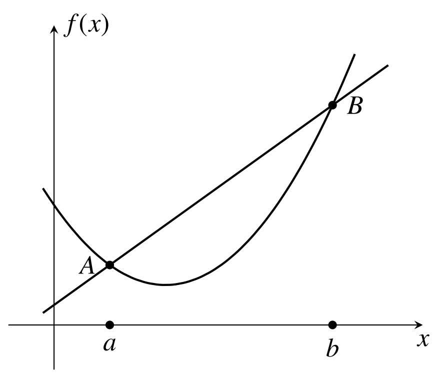






Remarque. Pour une fonction f, l’équation de la droite qui passe par les points $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$ du graphe de f est

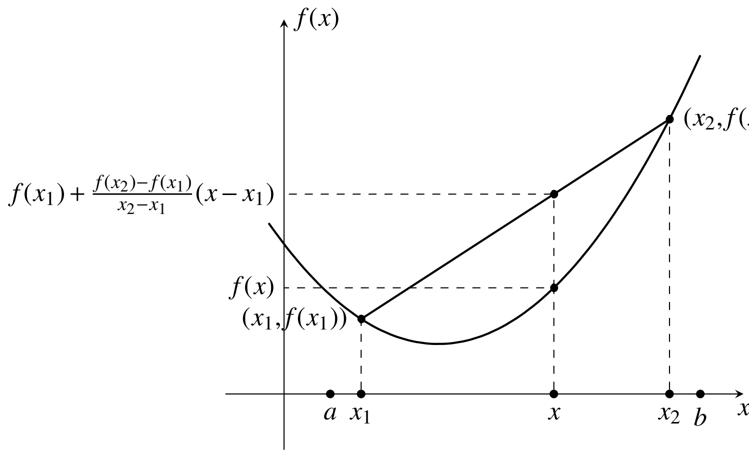
$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$



1.1.1 Concavité et convexité

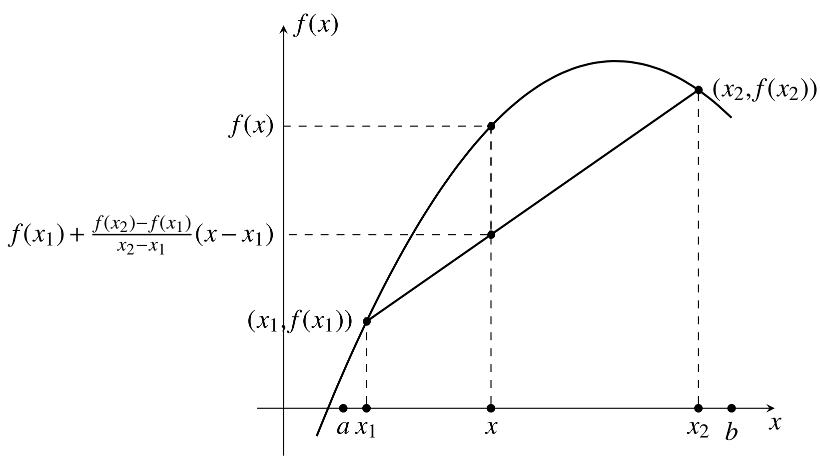
Définition. Une fonction f est **convexe** (ou « **concave vers le haut** ») sur $[a,b]$ si pour tout $x_1,x_2 \in [a,b]$ les points du graphe de f sont au dessus de la corde reliant $(x_1,f(x_1))$ et $(x_2,f(x_2)$. Plus précisément, si pour tout x entre x_1 et x_2, on a que

$$f(x) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

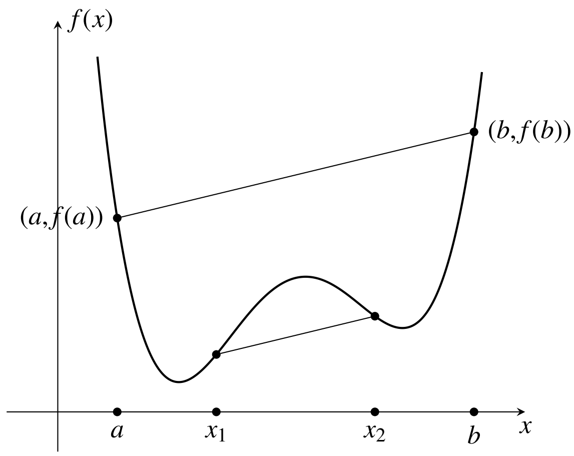


Une fonction f est **concave** (ou « **concave vers le bas** ») sur $[a,b]$ si pour n'importe quels $x_1,x_2 \in [a,b]$ les points du graphe de f sont au dessus de la corde reliant $(x_1,f(x_1))$ et $(x_2,f(x_2))$. Plus précisément, si pour tout $x \in]a,b[$

$$f(x) \geq f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1).$$



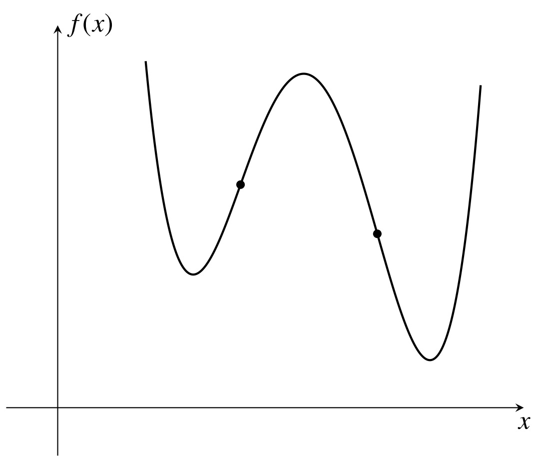
Remarque. Dans la définition de convexité d'une fonction sur un intervalle $[a,b]$, le segment passant par les points $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ doit être au dessus du graphe de f pour tous les points toutes les valeurs de x_1 et x_2 dans $[a,b]$, pas seulement pour les bouts $x_1 = a$ et $x_2 = b$. Par exemple, dans le cas du graphe suivant, la fonction n'est pas convexe sur $[a,b]$ même si le segment de droite reliant $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est au dessus du graphe de f, car dans le cas particulier des valeurs de x_1 et x_2 représentée, le segment reliant $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ est au-dessous du graphe. Pour la fonction soit convexe $[a,b]$, il faut que tous les segments $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ soient au dessus du graphe, ce qui n'est pas le cas ici.



1.1.2 Points d'inflexions

Définition. Un **point d'inflexion** est un point du graphe d'une fonction f où la fonction passe de concave à convexe ou inversement.

Exemple 1. Le graphe suivant montre les points d'inflexion de la fonction f.



Résumé

1.2 Dérivée seconde et concavité

Le résultat suivant établit un lien entre la dérivée seconde et la concavité.

Théorème.

a) Si $f''(x) > 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ est concave vers le haut sur $[a,b]$.
b) Si $f''(x) < 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ est concave vers le bas sur $[a,b]$.

Définition. Une valeur critique c pour la dérivée seconde de la fonction f est un nombre c dans le domaine de f tel que

$$f''(c) = 0 \text{ ou } f''(c)\nexists.$$

Exemple 2.

$$f(x) = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{4} - 2x + 1$$
$$f'(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} - 2 = \frac{1}{4}(x+4)(x-2)$$
$$f''(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x+1)$$

Valeurs critiques pour f'' :

$$f''(x) = 0 \iff x = -1.$$
$$f''(x)\nexists : \text{ aucune valeur critique.}$$

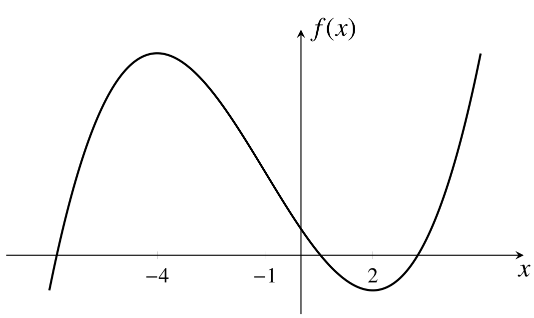
Valeurs critiques pour f' :

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{4}(x+4)(x-2) = 0 \iff x = -4, x = 2.$$
$$f'(x)\nexists : \text{ aucune valeur critique.}$$

Tableau de signe et interprétation des signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$ pour la fonction.

x	$-\infty$		-4		-1		2		∞
$(x-2)$		-	-	-	-	-	0	+	
$(x+4)$		-	0	+	+	+	+	+	
$f'(x)$		+	0	-	-	-	0	+	
$f''(x)$		-	-	-	0	+	+	+	
$f(x)$	$-\infty$		MAX		INF		MIN		∞

Graphe de $f(x)$:



Note. On utilise des flèches incurvées pour indiquer la croissance en même temps que la convavité. Il y a quatre combinaisons possibles :

$f'(x)$	+	−	−	+
$f''(x)$	−	−	+	+
$f(x)$				

Exemple 3. Étudier la croissance et la concavité de la fonction définie par

$$f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x = x(x-2)^3.$$

Commençons par étudier la dérivée première :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x(x-2)^3\right)' \\ &= (x-2)^3 + 3x(x-2)^2 \\ &= (x-2)^2((x-2)+3x)) \\ &= 2(x-2)^2(2x-1) \end{aligned}$$

On détermine les valeurs critiques pour f' : en utilisant la factorisation de $f'(x)$, on trouve que $f'(x) = 0$ quand $x = 2$ et $x = 1/2$.

Il n'y a aucune valeur de x où $f'(x)\nexists$.

On étudie aussi la dérivée seconde :

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(2(x-2)^2(2x-1)\right)' \\ &= 4(x-2)(2x-1) + 2(x-2)^2(2) \\ &= (x-2)(4(2x-1)+4(x-2)) \\ &= 4(x-2)((2x-1)+(x-2)) \\ &= 4(x-2)(3x-3) \\ &= 12(x-2)(x-1) \end{aligned}$$

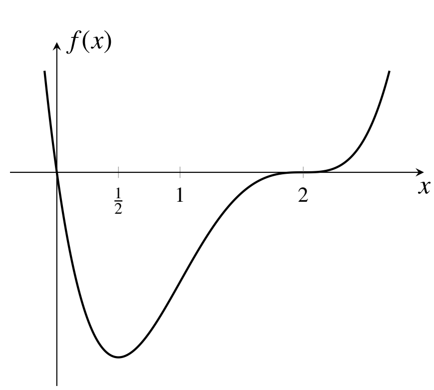
On détermine les valeurs critiques pour f' : en utilisant la factorisation de $f''(x)$, on trouve que $f''(x) = 0$ quand $x = 1$ et $x = 2$.

Il n'y a aucune valeur de x où $f'(x)\nexists$.

On peut déterminer les signes de f' et de f'' à l'aide des factorisations trouvées :

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		2		∞
$(2x-1)$		-	0	+	+	+	+	+	
$(x-1)$		-	-	-	0	+	+	+	
$(x-2)$		-	-	-	-	-	0	+	
$(x-2)^2$		+	+	+	+	+	0	+	
$f'(x) = 2(x-2)^2(2x-1)$		-	0	+	+	+	0	+	
$f''(x) = 12(x-1)(x-2)$		+	+	+	0	-	0	+	
$f(x)$	∞	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	INF	$\nearrow$	STA	$\nearrow$	∞

On peut faire une esquisse du graphe de f (on peut calculer les valeurs $f(1/2) = -27/16$ et de $f(2) = 0$) :

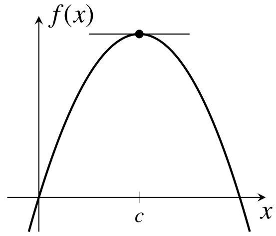


1.3 Test de la dérivée seconde

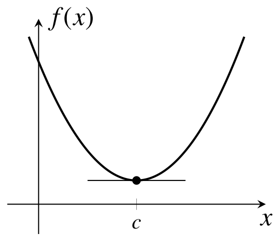
Le « test de la dérivée seconde » permet de déterminer si une fonction a un maximum ou un minimum à une valeur critique $x = c$. Il suffit de déterminer la concavité de la fonction en $x = c$ à l'aide du signe de la dérivée seconde, comme indiqué dans le théorème suivant.

Théorème (Test de la dérivée seconde)**.**

a) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) < 0$, alors f a un maximum local en $x = c$.



b) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$, alors f a un minimum local en $x = c$.



c) Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) = 0$, on ne peut rien conclure.

Exemple 4. Trouver les minimums et les maximums de la fonction

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x + 1$$

On dérive f pour trouver ses valeurs critiques :

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 4 = -(3x+2)(x-2)$$

$$f'(x) = 0 \iff -3x^2 + 4x + 4 = 0 \iff x = -\frac{2}{3} \text{ ou } x = 2$$

On utilise le test de la dérivée seconde pour déterminer si ces valeurs critiques correspondent à des minimums ou des maximums locaux. La dérivée seconde de f est

$$f''(x) = -6x + 4.$$

Pour la valeur critique $x = -\frac{2}{3}$, on a que

$$f''\left(-\frac{2}{3}\right) = -6\left(-\frac{2}{3}\right) + 4 = 8 > 0$$

Comme la dérivée seconde est positive en $x = -2/3$, la fonction f est convexe en $x = -2/3$ et f a donc un minimum pour cette valeur critique.

Pour la valeur critique $x = 2$, on a que

$$f''(2) = -6(2) + 4 = -8 < 0$$

Comme la dérivée seconde est négative en $x = 2$, la fonction f est concave en $x = 2$ et f a donc un maximum pour cette valeur critique.