Calcul différentiel — Dérivées et limites

1 Taux de variation instantané avec les limites

Définition. Le **taux de variation instantané** (TVI) de la fonction f en $x = a$ est défini par

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \lim_{\Delta x \to 0} \left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

On remplace donc l'idée d'un « dx infinitésimal » par l'idée plus précise de limite quand $\Delta x \to 0$. Cette idée permet d'éviter les complications conceptuelles de l'idée de nombre « infiniment petit ». Avec les limites, on parle d'une quantité « aussi petite que l'on veut » plutôt que d'une quantité « infiniment petite ».

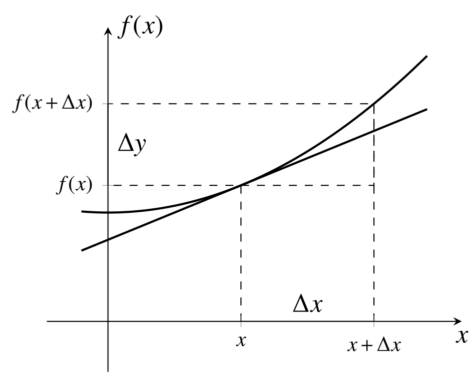
Note. Quand on évalue le taux de variation instantané à l'aide de cette définition, la limite impliquée sera toujours un cas d'indétermination « $\frac{0}{0}$ », car $\Delta y \to 0$ quand $\Delta x \to 0$. Il faut donc toujours utiliser une transformation algébrique permettant de simplifier un facteur Δx pour lever l'indétermination.

2 Dérivée

Comme la pente de la tangente à au graphe d'une fonction f est directement lié à sa croissance, il est utile de la considérer comme une nouvelle fonction *dérivée* de la fonction initiale. Cette fonction dérivée associe à chaque valeur de x dans le domaine de f la pente de la tangente au graphe de f au point $\big(x, f(x)\big)$.

Définition. La **fonction dérivée** f' d'une fonction f est définie par

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \overset{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$



La fonction dérivée f' est la fonction qui associe à chaque valeur de x le taux de variation instantané de f en x, soit la pente de la tangente en $\big(x, f(x)\big)$:

$$f'(x) = \mathrm{TVI}_x(f) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Les notation $f'(x)$ et $\mathrm{TVI}_x(f)$ sont donc interchangeables. Cependant, la notation $f'(x)$ met l'accent sur le fait que la nouvelle fonction f' est déterminée à partir de la fonction originale f. Cette fonction est le plus souvent appelée simplement *la dérivée de f*.

L'opération « ' » (dérivée) est en fait elle même une sorte de fonction, mais qui prend une fonction comme argument et qui retourne une nouvelle fonction :

$$\text{dérivée} : \text{fonctions réelles} \to \text{fonctions réelles}$$

2.1 Détermination de dérivées à l'aide de la définition en terme de limites

Exemple 1. Si $f(x) = x^3$, alors

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3) - x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 \\
&= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2 \\
&= 3x^2
\end{aligned}$$

On a donc que $f'(x) = 3x^2$.

Exemple 2. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, la dérivée de f est

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}}{\Delta x} \frac{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{x+\Delta x+1} - \sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x+1) - (x+1)}{\Delta x} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}\right)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+0+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x+1}}
\end{aligned}$$

La dérivée de f est donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$.

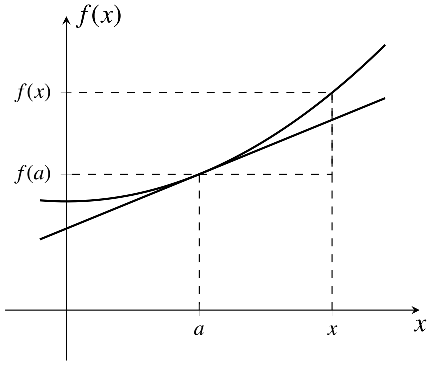
Résumé

2.2 Définition alternative de la dérivée

On peut aussi définir la dérivé de la manière suivante :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

La comparaison du graphique suivant, qui illustre les principaux éléments de la définition précédente, avec le graphique illustrant la définition originale permet de voir leur équivalence géométrique : dans les deux cas, on détermine la dérivée à l'aide de pente de sécantes approximant la pente de la tangente.



Note. On peut aussi écrire la définition de la dérivée de la manière suivante, en utilisant x_0 au lieu de a.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

La notation x_0, x_1, x_2 est souvent utilisée pour désigner des valeurs particulières de x.

Exemple 3. Si $f(x) = \sqrt{x+1}$, la dérivée $f(a)$ peut être calculée par

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{a+1}}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{a+1}}{x - a} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{a}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{a+1}} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{(x+1) - (a+1)}{x - a} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{a+1}} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{x - a}{x - a} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{a+1}} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{a+1}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a+1} + \sqrt{a+1}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{a+1}}
\end{aligned}$$

Résumé

3 Différentiabilité

Définition. Une fonction f est **différentiable** en $x = a$ si la limite servant à définir $f'(a)$ existe, c'est à dire quand

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} \text{ existe}$$

Exemple 4. La fonction valeur absolue $f(x) = |x|$ n'est pas différentiable en $x = 0$.

En effet,

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \end{aligned}$$

Cette dernière limite est une limite « $\frac{0}{0}$ ». On ne peut pas directement simplifier $|x|$ et x. Il faut simplifier différemment selon le signe de x. Si x est positif, $|x| = x$ et donc

$$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1.$$

Si x est négatif, $|x| = -x$ et donc

$$\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1.$$

On peut donc compléter le calcul de $f'(0)$ en prenant les limites à droite et à gauche.

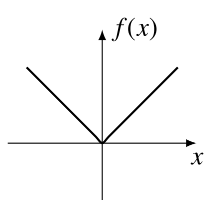
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} -1 = -1$$

Comme les limites à droites et à gauche ne sont pas égales, on a que

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} \nexists.$$

On a donc montré que $f'(0)$ n'existe pas, car la limite présente dans la définition n'existe pas.



Une conséquence importante de la différentiabilité est que si une fonction admet une tangente en un point de son graphe, la fonction est nécessairement continue en ce point.

Proposition 1. Si f est différentiable en $x = a$, alors f est continue en $x = a$.

Démonstration. On suppose que f est différentiable en $x = a$ et on cherche à montrer que f est continue en $x = a$, c'est à dire que

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Si f est différentiable en $x = a$, par définition, il existe une valeur L telle que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L.$$

Si on considère la limite

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a),$$

en utilisant la propriété donnant la limite d'un produit, on doit avoir que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \to a}(x - a) \\ &= L(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Si on simplifie le facteur $x - a$ dans la limite, on a que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a) = \lim_{x \to a} f(x) - f(a),$$

et avec le résultat précédent, on a donc que

$$\lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0.$$

$$\lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} f(a) = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right) - f(a),$$

et donc

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

c'est à dire que f est continue en $x = a$. □

La contraposée du dernier théorème sera utile pour l'analyse de fonctions.

Corollaire. Si une fonction n'est pas continue en $x = a$, alors elle n'est pas différentiable en $x = a$.

Comme une fonction qui n'est pas définie en un point de peut être continue en ce point, une fonction n'est jamais différentiable hors de son domaine.

Résumé

3.1 Types de non-différentiabilité

Comme la différentiabilité n'est rien d'autre que l'existence d'une limite et qu'il y a différent scénarios où une limite n'existe pas, il y a aussi différents scénarios où une fonction n'est pas dérivable (en un point).

Une fonction n'est pas différentiable en $x = a$ si on se trouve dans un des scénarios suivant.

- La fonction n'est pas continue en $x = a$
- $\lim_{x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty$
- $\lim_{x \to a^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{x \to a^+} \frac{\Delta y}{\Delta x}$
- $\lim_{x \to a} \frac{\Delta y}{\Delta x} \nexists$ parce que $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ oscille sans se stabiliser

On examine en détails ces différents scénarios dans ce qui suit.

3.1.1 Discontinuités

Le corollaire dit que si une fonction n'est pas continue en $x = a$, il n'y pas de tangente définie en $x = a$.

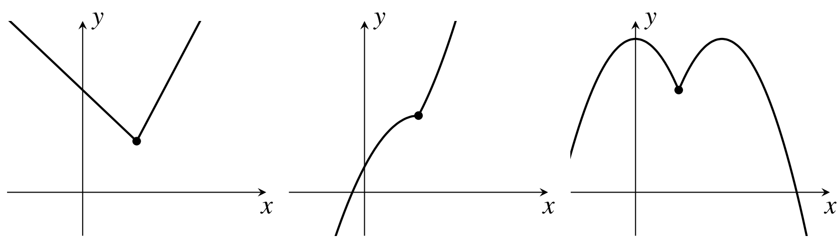
3.1.2 Points anguleux

Définition. Un **point anguleux** est un point où

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \neq \lim_{x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

mais où les limites à droite et à gauche existent toutes deux.

Dans une telle situation, il y a « deux tangentes », une à droite et une à gauche. Voici quelques exemples de points anguleux.

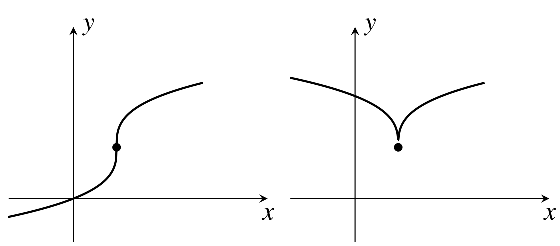


3.1.3 Tangentes verticales

Définition. Un **point à tangente verticale** est un point où

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty.$$

Autrement dit, la tangente en un point d'une fonction est verticale quand la dérivée y devient infinie. Cela peut se produire de deux manières.



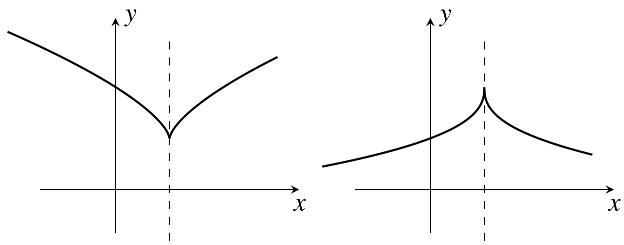
Dans les deux situation, la pente de la tangente est infinie au point indiqué. Pour les autres points de la courbe, dans la situation de gauche, la pente des tangentes sont toujours positive alors que dans la situation de droite, les pentes des tangentes sont négative si on approche le point par la gauche et positive si on l'approche par la droite.

On appelle le point de la figure de droite un **point de rebroussement**.

3.1.4 Points de rebroussement

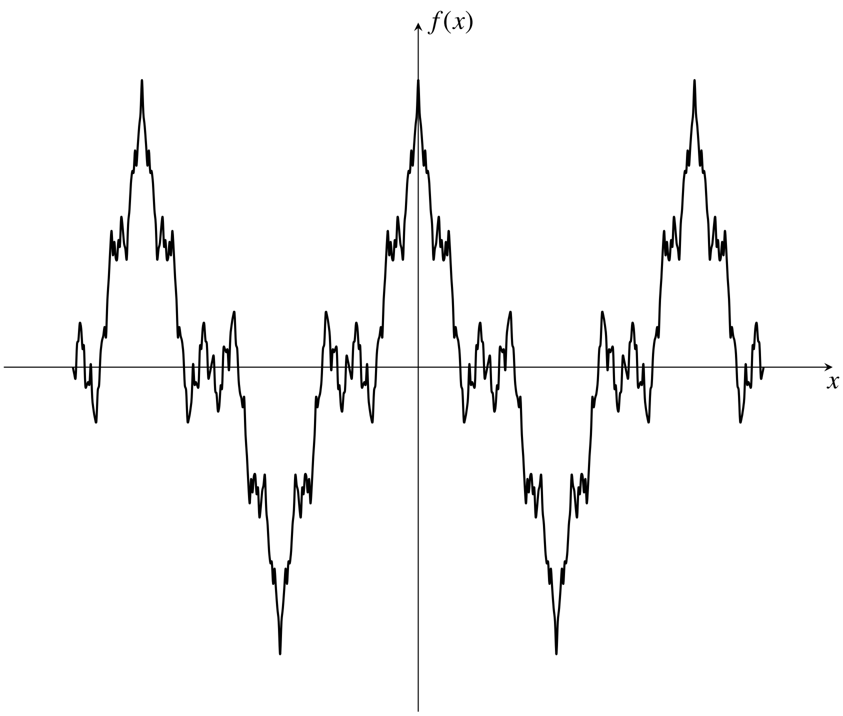
Définition. Un **point de rebroussement** est un point à tangente verticale où les limites $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ sont de signe contraires.

Autrement dit, en un point de rebroussement en $x = a$, les tangentes au graphes deviennent verticales quand x s'approche de a par la droite et par la gauche, mais en ayant des pentes de signes contraires.



3.1.5 Oscillations particulières

Enfin, un point de non-dérivabilité peut être du au fait que la limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ n'existe pas à cause d'oscillations qui ne se stabilisent pas. Un exemple connu est la fonction de Weirestrass, qui a la propriété d'être dérivable en aucune valeur de son domaine !



Résumé

3.2 Propriétés de la dérivée

Quand on définie la dérivée à l'aide de limites, les propriétés de la dérivées sont des conséquences des propriétés des limites.

Proposition 2.

(a) $(C)' = 0$
(b) $(x^n)' = nx^{n-1}$ si n est un entier naturel positif
(c) $(Cf(x))' = C(f(x))$ si f est dérivable en x.
(d) $(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$ si f et g sont dérivables en x.

Démonstration.

(a) Si $f(x) = C$, où $C \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C-C}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Si $f(x) = x^n$, où $n \in \mathbb{N}$ est un nombre naturel strictement positif, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x^n + nx^{n-1}\Delta x + \cdots x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n) - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{nx^{n-1}\Delta x + \cdots + x\Delta x^{n-1} + \Delta x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(nx^{n-1} + \cdots + x\Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1})}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} nx^{n-1} + \cdots + \Delta x^{n-1} \\ &= nx^{n-1} + (0) + \cdots + (0)^{n-1} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

(c) Si $f(x)$ est une fonction dérivable et $C \in \mathbb{R}$ est une constante, alors

$$\begin{aligned} \left(Cf(x)\right)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{Cf(x+\Delta x) - Cf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(f(x+\Delta x) - f(x))}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} C\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= C \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= Cf'(x) \end{aligned}$$

(d) Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions dérivables, alors

$$\begin{aligned}
\Big(f(x)+g(x)\Big)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Big(f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)\Big)-\Big(f(x)+g(x)\Big)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{((f(x+\Delta x)-f(x))+(g(x+\Delta x))-g(x))}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&= f'(x)+g'(x)\square
\end{aligned}$$

Proposition 3. Si f est une fonction dérivable en x, alors

(a) $\Big(f(x)g(x)\Big)' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(b) $\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = \dfrac{-1g'(x)}{(g(x))^2}$

(c) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

Démonstration. On suppose que f et g sont dérivables en x. Cela implique que f et g sont continues en x.

Pour la dérivée du produit :

$$\begin{aligned}
\Big(f(x)g(x)\Big)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)+f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}+\frac{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x+\Delta x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)g(x+\Delta x)-f(x)g(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}g(x+\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0} f(x)\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&= f'(x)g(x+0)+f(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\\
&= f'(x)g(x+0)+f(x)g'(x)\\
&= f'(x)g(x)+f(x)g'(x)
\end{aligned}$$

Pour la dérivée du quotient $\dfrac{1}{g(x)}$: on suppose g dérivable en x, donc continue en x.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\dfrac{1}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{1}{g(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\dfrac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} -\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)g(x)}\frac{1}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} -\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{\Delta x}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0} -\frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \\
&= -\lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{\Delta x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{g(x+\Delta x)g(x)} \\
&= -g'(x)\frac{1}{g(x+0)g(x)} \\
&= -\frac{g'(x)}{g(x)g(x)} \\
&= -\frac{g'(x)}{\big(g(x)\big)^2}
\end{aligned}$$

Pour la dérivée du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$: on suppose que f et g dérivable en x. On démontre le résultat directement en utilisant les deux résultats précédents.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\frac{-g'(x)}{(g(x))^2} \\
&= \frac{f'(x)}{g(x)} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\
&= \frac{f'(x)g(x)}{(g(x))^2} - \frac{f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \\
&= \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \qquad \square
\end{aligned}$$

Résumé