

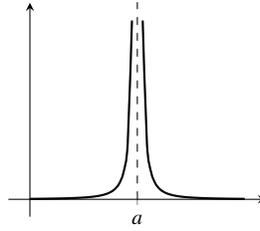
1 Limite, asymptotes et arithmétique de l'infini

Définition.

On écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

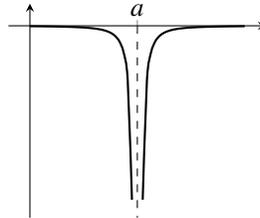
si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut quand x est assez près de a .



On écrit

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

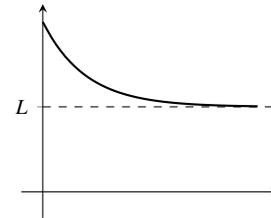
si $f(x)$ est aussi petit que l'on veut quand x est assez près de a .



On écrit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

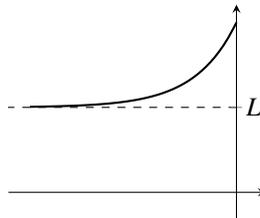
si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut quand x est assez grand.



On écrit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut quand x est assez petit.



On écrit

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$$

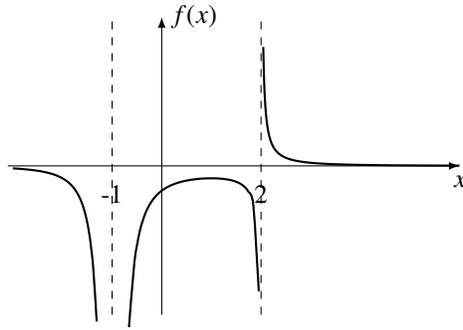
si $f(x)$ est aussi grand (ou petit) que l'on veut quand x est assez grand.

On écrit

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$$

si $f(x)$ est aussi grand (ou petit) que l'on veut quand x est assez petit.

Exemple 1. Considérons la fonction ayant le graphe suivant.



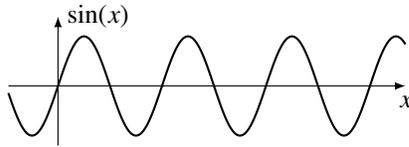
Pour cette fonction,

- $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \nexists$
- $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

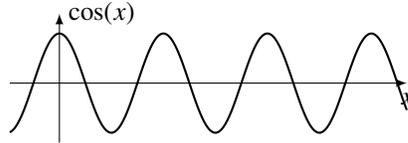
Remarque. Dans l'exemple précédent, on a écrit $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ car la fonction tend vers $-\infty$ peu importe comment $x \rightarrow -1$. Cependant, comme cette limite n'a pas de valeur car ∞ n'est pas un nombre réel, mais un symbole indiquant le comportement d'une fonction. On pourrait aussi écrire que $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) \nexists$.

Remarque. Certaines limites à l'infini n'existent pas, car les valeurs de la fonction ne s'approchent pas d'une valeur déterminée quand x devient de plus en plus grand (ou de plus en plus petit). Les fonctions trigonométriques sont un exemple : leur périodicité entraîne que les limites à l'infini ne convergent pas.

• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sin(x) \nexists$



• $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos(x) \nexists$



Résumé

1.1 Arithmétique de l'infini

De manière générale, on peut utiliser « l'arithmétique de l'infini » (aussi appelé « algèbre de l'infini ») pour déterminer le comportement d'une fonction qui tend vers ∞ ou $-\infty$, ou quand $x \rightarrow \pm\infty$.

Définition (Arithmétique de l'infini).

$$\infty + \infty = \infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty$$

$$\infty \pm k = \infty$$

$$\pm k \cdot \infty = \pm\infty$$

$$\infty^\infty = \infty$$

$$\infty^k = \infty$$

$$(-\infty)^k = \begin{cases} \infty & \text{si } k \text{ pair} \\ -\infty & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\infty} = \infty$$

$$\sqrt[n]{-\infty} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n \text{ impair} \\ \nexists & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Exemple 2. Déterminons quelques limites à l'aide de l'arithmétique de l'infini.

- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty^2 = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = (-\infty)^2 = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty^3 = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = (-\infty)^3 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} x + x^2 = \infty + \infty^2 = \infty + \infty = \infty$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 5} = \sqrt{\infty^2 + 5} = \sqrt{\infty + 5} = \sqrt{\infty} = \infty$.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^3 + 1} = \sqrt{(-\infty)^3 + 1} = \sqrt{-\infty + 1} = \sqrt{-\infty} \nexists$.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{4} = \frac{\infty^3 + 1}{4} = \frac{\infty + 1}{4} = \frac{\infty}{4} = \infty$.

Remarque. Il faut garder en tête que ces règles de manipulation du symbole « ∞ » ne sont que des manières d'étudier le comportement de certaines limites; « ∞ » n'est pas un nouveau nombre, même si ces règles peuvent donner cette impression. Ce symbole n'est qu'une manière commode de raisonner rapidement sur des limites où des valeurs sont aussi grande ou petite que l'on veut. En fait, on pourrait complètement se passer de l'arithmétique de l'infini et raisonner qu'avec des limites.

Résumé

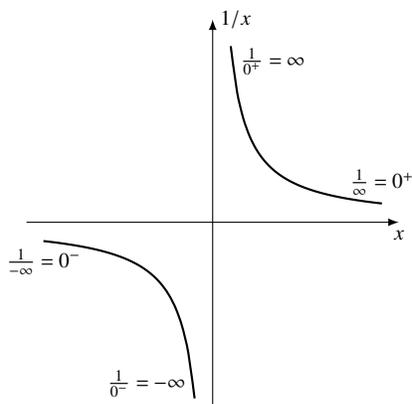
2 Limites impliquant les formes $\frac{1}{\pm\infty}$, $\frac{1}{0^+}$ et $\frac{1}{0^-}$

On peut ajouter les règles suivantes à l'arithmétique de l'infini.

Définition.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\infty} &= 0^+ & \frac{1}{-\infty} &= 0^- \\ \frac{1}{0^+} &= \infty & \frac{1}{0^-} &= -\infty \\ & & \frac{1}{0} & \nexists \end{aligned}$$

Ces règles sont justifiées par le comportement de la fonction $f(x) = 1/x$.



Note. Comme $\frac{1}{\infty} = 0$, on a que $\frac{k}{\infty} = k \frac{1}{\infty} = k \cdot 0 = 0$ pour n'importe quelle constante k .

Exemple 3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{x^3} \right) = 2 + \frac{3}{\infty^3} = 2 + 3 \frac{1}{\infty} = 2 + 3(0) = 2$$

Note. Les identités suivantes concernant les limites à droite et à gauche seront souvent utilisées :

$$\begin{aligned} a^+ - a &= 0^+ & a^- - a &= 0^- \\ C(0^+) &= 0^+ & C(0^-) &= 0^- \text{ (si } C > 0) \\ C(0^+) &= 0^- & C(0^-) &= 0^+ \text{ (si } C < 0) \end{aligned}$$

Exemple 4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4}{x-3} &= \frac{4}{3^- - 3} \\ &= \frac{4}{0^-} \\ &= 4 \frac{1}{0^-} \\ &= 4(-\infty) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Exemple 5. Factoriser peut aider à déterminer la limite :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x^2 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{(x-1)(x-3)} \\ &= \frac{2}{(1^+ - 1)(1^+ - 3)} \\ &= \frac{2}{(0^+)(-2)} \\ &= \frac{2}{0^-} \\ &= -\infty\end{aligned}$$

Exemple 6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(1/x)} = \frac{\infty}{0^+} = \infty \frac{1}{0^+} = \infty \cdot \infty = \infty.$$

On peut aussi voir que $\frac{\infty}{0^+} = \infty$ de la manière suivante :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{(1/x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{x}{1} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty.$$

Ou encore, avec l'arithmétique de l'infini :

$$\frac{\infty}{1/\infty} = \infty \frac{\infty}{1} = \infty^2 = \infty.$$

On doit garder en tête que les formes $\frac{0}{0}$ et $\frac{\infty}{\infty}$ et $\infty - \infty$ sont indéterminés – voir la section suivante.

Résumé

2.1 Formes indéterminées

Nous avons déjà étudié les indéterminations de la forme « $\frac{0}{0}$ ». Si on ajoute les limites quand $x \rightarrow \pm\infty$ et celles qui tendent vers $\pm\infty$, il y a de nouvelles formes indéterminées, c'est-à-dire qu'en évaluant certaines limites à l'aide de l'arithmétique de l'infini, on peut obtenir des expressions qui ne nous permettent pas de déterminer la valeur de la limite.

2.1.1 Formes indéterminées « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Pour comprendre pourquoi il y a indétermination quand l'évaluation directe donne un résultat de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ », comparons les trois situations suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3}$$

En évaluant directement, on obtient une expression de la forme « $\frac{\infty}{\infty}$ » pour chacune des trois limites.

Si on simplifie avant d'évaluer, on obtient cependant trois résultats très différents :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \end{aligned}$$

On peut interpréter intuitivement ces résultats de la manière suivante : dans une forme « $\frac{\infty}{\infty}$ », le numérateur et le dénominateur sont deux fonctions qui tendent vers l'infini. Si le dénominateur « va plus vite » à l'infini que le numérateur, le dénominateur l'emporte et le rapport tend vers 0. Si le numérateur « va plus vite » à l'infini que le dénominateur, le numérateur l'emporte et le rapport tend vers l'infini. Si les deux vont vers l'infini « à la même vitesse », le rapport tend vers une constante.

Dans une telle forme d'indétermination, il faut mettre en évidence la plus grande puissance de x au numérateur et au dénominateur. On peut ensuite simplifier, ce qui revient à comparer les « vitesses » du dénominateur et du numérateur.

Exemple 7.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 1}{3x^4 + 2x + 3} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.}$$

En mettant en évidence la plus grande puissance de x au numérateur et au dénominateur, on trouve que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x + 1}{3x^4 + 2x + 3} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{x^4 \left(3 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right) \frac{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{3 + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}} \\ &= \left(\frac{1}{\infty}\right) \frac{1 + \frac{1}{\infty^2} + \frac{1}{\infty^3}}{3 + \frac{2}{\infty^2} + \frac{3}{\infty^3}} \\ &= (0) \frac{1 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Exemple 8.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x + 4}{3x^2 + x + 2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ F.I.}$$

En mettant en évidence la plus grande puissance de x au numérateur et au dénominateur, on trouve que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 3x + 4}{3x^2 + x + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(5 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} \right)}{x^2 \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} \\ &= \frac{5 + \frac{3}{\infty} + \frac{4}{\infty^2}}{3 + \frac{1}{\infty} + \frac{2}{\infty^2}} \\ &= \frac{5 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} \\ &= \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

Dans ces exemples, on peut voir que le résultat d'une telle limite est déterminé par le rapport des termes de plus grande puissance.

2.1.2 Forme « $\infty - \infty$ »

Comme dans la section précédente, une telle forme est indéterminée car la limite à évaluer peut donner des résultats différents selon la « vitesse » à laquelle les termes vont à l'infini. Considérons les trois limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x^2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x^3.$$

Si on tente d'évaluer directement ces limites, on obtient dans chacun des cas une expression de la forme « $\infty - \infty$ ».

On peut évaluer chacune d'elle en transformant d'abord les fonctions considérées.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 - x^2 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3(1 - 1/x) = \infty(1 - 0) = \infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x^2 &= \lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x^3 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^3(1/x - 1) = \infty(0 - 1) = -\infty \end{aligned}$$

On voit donc qu'on ne peut donc pas déterminer la valeur d'une limite sachant qu'on obtient un résultat de la forme « $\infty - \infty$ ». Autrement dit, il est impossible d'ajouter une règle de calcul à l'arithmétique de l'infini qui donnerait toujours le résultat. Dans une telle situation, pour déterminer la limite il faut d'abord transformer algébriquement la fonction.

Exemple 9.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} = \frac{1}{(0^+)^2} - \frac{1}{(0^+)^3} = \infty - \infty \text{ F.I.}$$

Pour lever l'indétermination, on met au dénominateur commun.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^3} - \frac{1}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^3} \\ &= \frac{(0)-1}{(0^+)^3} \\ &= \frac{-1}{0^+} \\ &= -\infty \end{aligned}$$

Exemple 10.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x^3 = \infty^2 - \infty^3 = \infty - \infty \text{ F.I.}$$

Il faut donc lever l'indétermination « $\infty - \infty$ ». On met en évidence la plus grande puissance de x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 - x^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{1}{x} - 1 \right) = \infty^3 \left(\frac{1}{\infty} - 1 \right) = \infty(-1) = -\infty$$

Résumé

2.1.3 Autres formes indéterminées

Les formes

$$0 \cdot \infty \quad 1^\infty \quad \infty^0 \quad 0^0$$

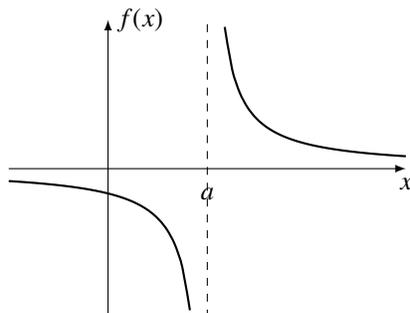
sont toutes indéterminées. Elles seront étudiées de manière détaillée en calcul intégral avec l'introduction de la *Règle de l'Hospital* et de différentes techniques permettant de lever ce type d'indétermination. La stratégie consiste à transformer les fonctions dont les limites donnent une de ces formes indéterminées en fonctions où les formes indéterminées sont « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

3 Limites et asymptotes

3.1 Asymptotes verticales

Définition. Une fonction réelle f a comme **asymptote verticale** la droite $x = a$ si

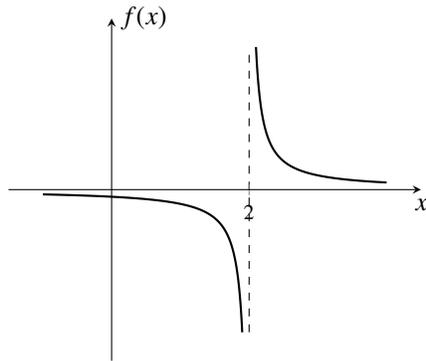
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$



Note. De manière générale, une fonction de la forme $\frac{f(x)}{g(x)}$ peut avoir une asymptote verticale quand $g(x) = 0$, c'est-à-dire pour les valeurs de x où il y a une division par zéro. Il n'y a pas toujours une asymptote verticale quand il y a division par zéro, mais c'est l'endroit où les chercher !

Exemple 11. La fonction $f(x) = \frac{1}{x-2}$ a une asymptote verticale en $x = 2$ car

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$

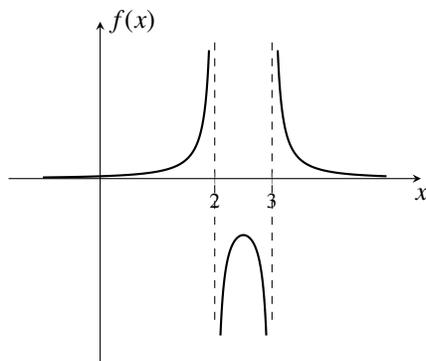


Une fonction peut avoir plusieurs asymptotes verticales comme dans l'exemple suivant. On note qu'un fonction peut avoir au plus deux asymptotes verticales différentes, une quand $x \rightarrow \infty$ et une quand $x \rightarrow -\infty$.

Exemple 12. La fonction $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-2)(x-3)}$ a des asymptotes verticales en $x = 2$ et en $x = 3$ car

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(0^+)(-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \frac{1}{(1)(0^+)} = \frac{1}{0^+} = \infty.$$



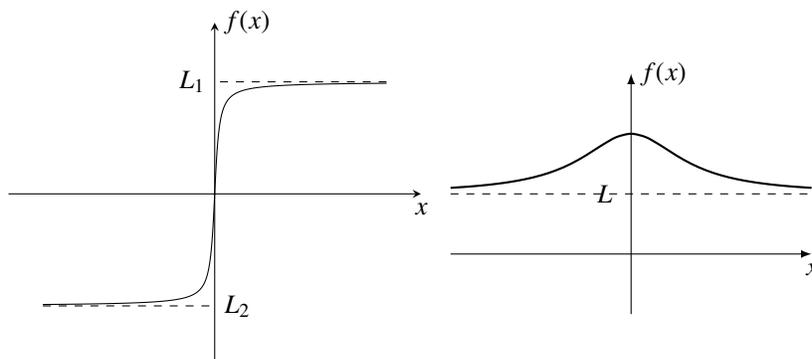
Résumé

3.2 Asymptotes horizontales

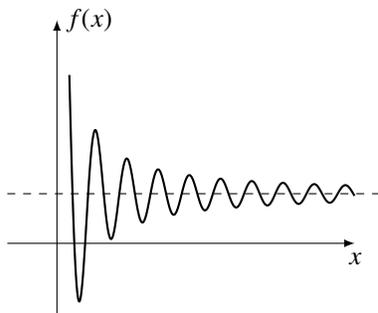
Définition. Une fonction réelle f a comme **asymptote horizontale** la droite $y = L$ si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \text{ ou } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Remarque. Une fonction peut avoir deux asymptotes horizontales différentes, une quand $x \rightarrow \infty$ et une autre quand $x \rightarrow -\infty$ (graphe de gauche), elle peut n'avoir aucune asymptote horizontale, ou encore une seule asymptote horizontale (graphe de droite).



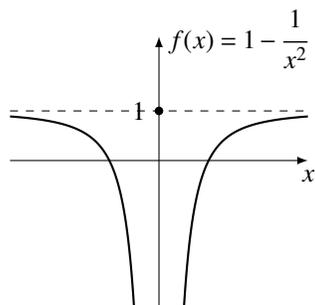
Remarque. Une erreur fréquente est de penser qu'une asymptote est une droite de laquelle le graphe d'une fonction se rapproche *sans jamais la croiser*. Cette conception est erronée. Par exemple, pour la fonction suivante



la droite $y = 1$ est une asymptote horizontale, même si la fonction croise une infinité de fois l'asymptote !

Pour information, la fonction dans cet exemple est $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} + 1$.

Exemple 13. Soit $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.



Déterminons algébriquement si f une asymptote horizontale.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{\infty^2} = 1 - 0 = 1$$

La droite $y = 1$ est donc une asymptote horizontale de la fonction f .

Bien que ce qui précède suffit à démontrer que $y = 1$ est une asymptote horizontale de f , on peut aussi étudier le comportement de f quand $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1 - \frac{1}{(-\infty)^2} = 1 - 0 = 1$$

On voit donc que $y = 1$ est une asymptote horizontale autant quand $x \rightarrow \infty$ que quand $x \rightarrow -\infty$.

Exemple 14. Déterminons si $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{3x^2 + 2}$ a une asymptote horizontale.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x - 4}{3x^2 + 2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{2}{x^2}\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}}{3 + \frac{2}{x^2}} \\ &= \frac{1 - \frac{3}{\infty} - \frac{4}{\infty^2}}{3 + \frac{2}{\infty^2}} \\ &= \frac{1 - 0 - 0}{3 + 0} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La droite $y = \frac{1}{3}$ est donc une asymptote horizontale de la fonction f .

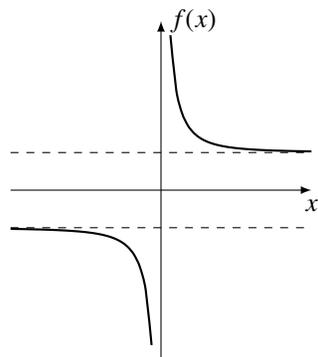
Il y a généralement des asymptotes horizontales dans un quotient de fonction quand les deux fonctions sont « de même force » ou du même ordre quand $x \rightarrow \pm\infty$, ce qui fait en sorte que la limite du quotient ait une valeur $k \in \mathbb{R}$.

Exemple 15. La fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$ a deux asymptotes horizontales différentes. Dans ce cas, cela est dû au fait que $\sqrt{x^2} = |x|$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \\ &= \sqrt{1 + \frac{1}{\infty^2}} \\ &= \sqrt{1 + 0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \\
&= -\sqrt{1+\frac{1}{(-\infty)^2}} \\
&= -\sqrt{1+0} \\
&= -1
\end{aligned}$$

Les droites $y = 1$ et $y = -1$ sont donc toutes deux des asymptotes horizontales de la fonction f .
Voici le graphe de f .



Résumé