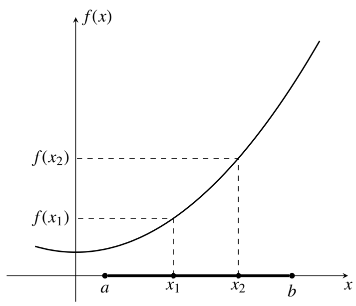
Calcul différentiel — Croissance et extrémums

1 Croissance et extrémums

1.1 Croissance et décroissance

Définition. La fonction f est **croissante** sur $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans l'intervalle $[a,b]$,

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2).$$

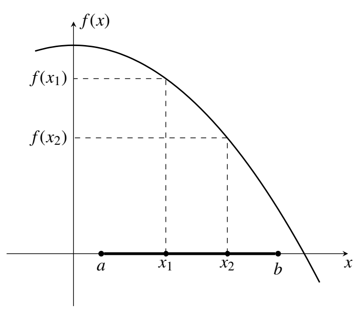


$f(x)$ est **strictement croissante** sur $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans $[a,b]$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2).$$

La fonction f est **décroissante** sur un intervalle fermé $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans l'intervalle $[a,b]$,

$$x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2).$$



$f(x)$ est **strictement décroissante** sur $[a,b]$ si pour tout x_1 et x_2 dans $[a,b]$,

$$x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$

Exemple 1. Pour illustrer l'utilisation de cette définition pour vérifier qu'une fonction est croissante sur une intervalle, montrons que $f(x) = x^2$ est croissante sur $[0,\infty[$.

Prenons deux nombres réels $x_1 < x_2$. On doit montrer que $f(x_1) \leq f(x_2)$, c'est à dire que $x_1^2 \leq x_2^2$.

$$x_1^2 \leq x_2^2 \iff x_2^2 - x_1^2 \geq 0 \iff (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \geq 0$$

Or, $x_1 < x_2$ implique que $x_2 - x_1 > 0$. De plus, comme $x_1, x_2 \geq 0$, (car ils sont dans l'intervalle $[0,\infty[$), on a aussi que $x_2 + x_1 \geq 0$.

On a donc montré que si $0 \leq x_1 < x_2$, alors

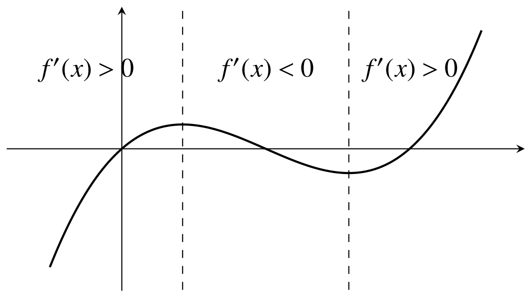
$$x_1^2 \leq x^2;$$

la fonction $f(x) = x^2$ est donc croissante sur $[0,\infty[$.

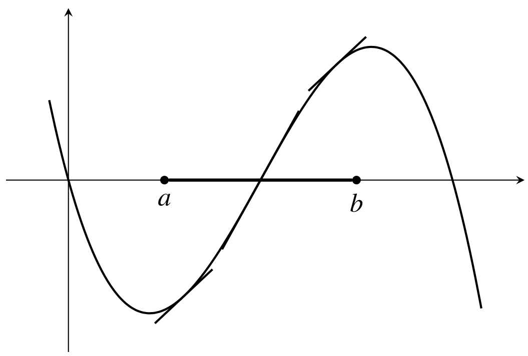
1.2 Croissance et dérivée première

L'intuition géométrique nous dit que la pente de la tangente à une fonction est liée à sa croissance. La pente est positive, la fonction doit être croissante, si la pente est négative, elle doit être décroissante.

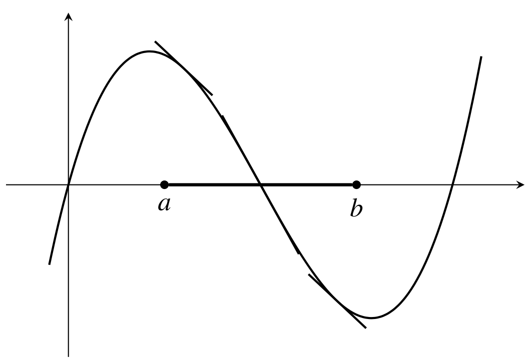
Comme la pente de la tangente est en fait $f'(x)$, la croissance est déterminée par le signe de $f'(x)$.



Théorème. Si $f'(x) > 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ est strictement croissante sur $[a,b]$.



Si $f'(x) < 0$ sur $[a,b]$, alors $f(x)$ est strictement décroissante sur $[a,b]$.



Lemme. Si f est une fonction différentiable en x_0 et $f'(x_0) > 0$, alors il existe un intervalle $]c,d[$ contenant x_0 sur lequel f est croissante.

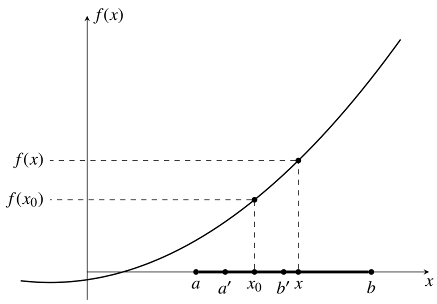
Démonstration du lemme. Soit x_0 est un nombre où $f'(x_0) > 0$. Par la définition de dérivée, on doit avoir que

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0. \tag{$*$}$$

De manière générale, si $F(x)$ est une fonction réelle et si $\lim_{x \to x_0} F(x) > 0$, alors $F(x) > 0$ si x est assez près de x_0.

On utilise ce fait avec $F(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Par $(*)$, le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est strictement positif si x est assez proche de x_0, disons dans l'intervalle $]c,d[$. Cela veut dire que si $x \in]c,d[$, on a que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0.$$

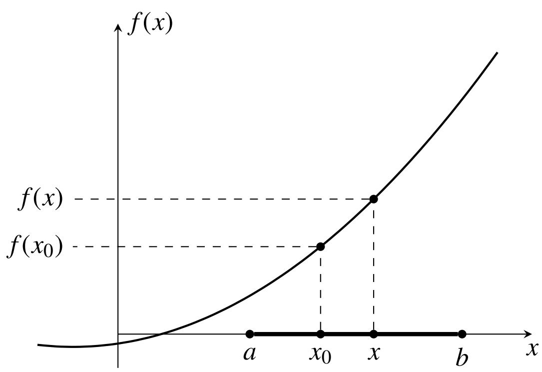


Si reste à montrer que f est croissante sur $]c,d[$. Soit x_1 un autre nombre dans cet intervalle.

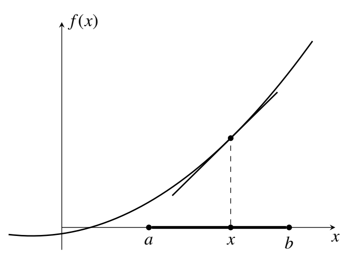
Si $x_1 > x_0$, on a que $x_1 - x_0 < 0$. Le dénominateur de $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ est donc positif. Comme ce quotient est positif parce que $x_1 \in]c,d[$ et que son dénominateur est lui-même positif, le numérateur $f(x_1) - f(x_0)$ doit aussi être positif. Dans ce cas, $f(x_1) - f(x_0) > 0$, et donc $f(x_1) > f(x_0)$.

Si on a plutôt que $x_1 > x_0$, on doit avoir que $x_1 - x_0 < 0$. Le dénominateur de $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ est donc négatif. Comme ce quotient est positif parce que $x_1 \in]c,d[$ et que son dénominateur est négatif, le numérateur $f(x_1) - f(x_0)$ doit être négatif. Dans ce cas, $f(x_1) - f(x_0) < 0$, et donc $f(x_1) < f(x_0)$. □

Démonstration du théorème.



Pour démontrer a), supposons que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$.



On veut montrer que f est croissante sur l'intervalle $[a,b]$, c'est à dire que si c et d sont deux nombres tels que $a \le c \le d \le b$, alors $f(c) \le f(d)$.

On a donc montré que si x et x_0 sont dans l'intervalle $]a,b[$ et $x > x_0$, alors $f(x) > f(x_0)$. f est donc croissante que $]a,b[$.

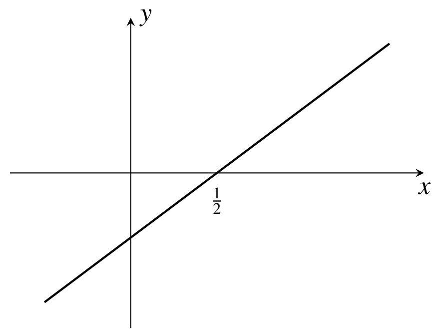
La démonstration de la partie b) est similaire. □

Exemple 2. Déterminons pour quelles valeurs de x la fonction définie par $f(x) = 5x^2 - 5x + 3$ est croissante.

Pour déterminer les valeur de x où f est croissante, par le théorème refthm :croissancederivee, il suffit de déterminer le signe de la dérivée.

La dérivée de la fonction est
$$f'(x) = 10x - 5.$$

Comme $10x-5$ a un seul zéro $x = 1/2$ et est continue, $f'(x)$ ne change de signe qu'une seule fois en $x = 1/2$. De plus $f'(x) = 10x-5$ est une droite de pente 10, donc croissante. Les valeurs de $10x-5$ sont donc positives pour $x > 1/2$ et négatives pour $x < 1/2$, comme on peut le constater dans la représentation graphique de la droite d'équation $y = 10x-5$:



On peut résumer ces observations dans le tableau de signe suivant :

x		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	-	0	+

En utilisant le théorème , on peut compléter ce tableau avec une ligne indiquant la croissance et la décroissante de f.

x		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

La fonction est donc décroissante sur $]-\infty,1/2]$ et croissante sur $[1/2,\infty[$.

Enfin, notons que nous avons indiqué « MIN » car si la fonction est décroissante et ensuite croissante, elle atteint nécessairement un minimum en $x = 1/2$.

Exemple 3. Étudions croissance de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + 1.$$

Pour déterminer les valeur de x où f est croissante, par le théorème refthm :croissancederivee, il suffit de déterminer le signe de la dérivée.

La dérivée de la fonction est

$$f'(x) = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3).$$

Les zéros de f' sont en $x = -2$ et $x = 3$.

Comme f' est une fonction polynômiale, elle est continue sur $\mathbb{R}$ et ne peut changer de signe uniquement qu'en passant par zéro en $x = -2$ et $x = 3$.

Le facteur $x+2$ change de signe en $x = -2$ et le facteur $x-3$ change de signe en $x = 3$. On peut combiner les signes de ces deux facteurs pour déterminer le signe de leur produit $(x+2)(x-3)$ à l'aide de la règle des signes usuelle pour un produit :

x		-2		3	
$x+2$	-	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
$(x-2)(x-3)$	+	0	-	0	+

On a donc déterminé les signes de $f'(x)$, ce qui permet de faire le tableau de signe de la dérivée :

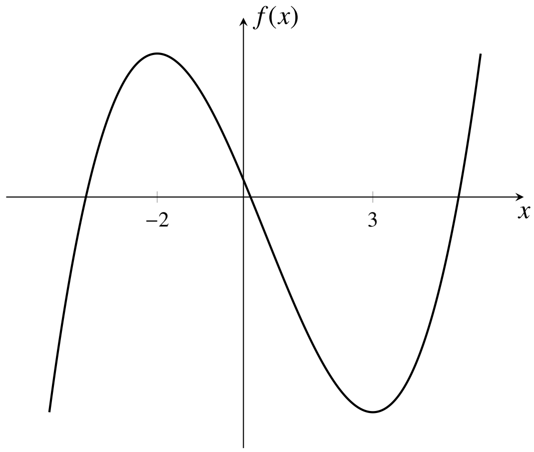
x		-2		3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

En utilisant le théorème , on peut compléter ce tableau avec une ligne indiquant la croissance et la décroissante de f.

x		-2		3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

La fonction est donc croissante sur $]-\infty,-2]$ et décroissante sur $[-2,3]$ et croissante sur $[3,\infty[$.

Le graphe de f est le suivant :



1.3 Extrémums

Le terme « extrémum » désigne à la fois les maximums et les minimums, les deux types de « valeurs extrêmes » d'une fonction. Les extrémums d'une fonction sont étroitement liés à la croissance et à la décroissance de la fonction.

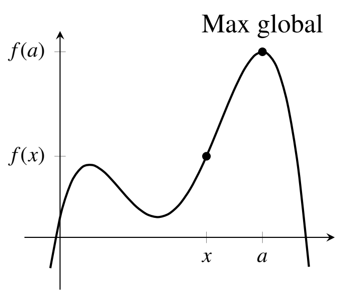
1.3.1 Extrémums globaux

Un **extrémum global** est la valeur la plus grande ou la plus petite atteinte par une fonction sur l'ensemble de son domaine.

Définition. Une fonction réelle f a un **maximum global** en $x = a$ si

$$f(a) \geq f(x)$$

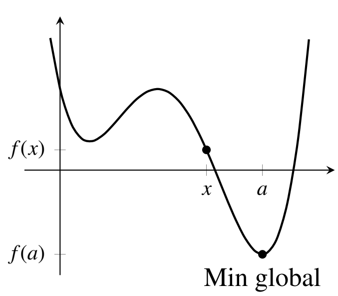
pour tout x dans le domaine de f.



Une fonction réelle f a un **minimum global** en $x = a$ si

$$f(a) \leq f(x)$$

pour tout x dans le domaine de f.



Note. Il peut y avoir plusieurs extrémums globaux quand la valeur maximum est atteinte en plusieurs valeurs de x.

Note. Un extrémum global est aussi appelé un **extrémum absolu**.

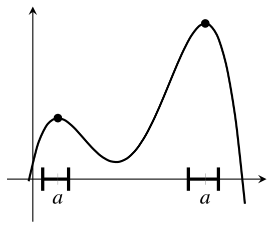
1.3.2 Extrémums locaux

Un **extrémum local** est la valeur la plus grande ou la plus petite atteinte par une fonction dans une région de son graphe, autour d'une valeur de x donnée.

Définition. Une fonction réelle f a un **maximum local** en $x = a$ si

$$f(a) \geq f(x)$$

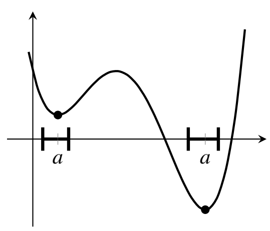
pour tout x assez près de a (c'est à dire dans un intervalle ouvert $]c,d[$ contenant a).



Une fonction réelle f a un **minimum local** en $x = a$ si

$$f(a) \leq f(x)$$

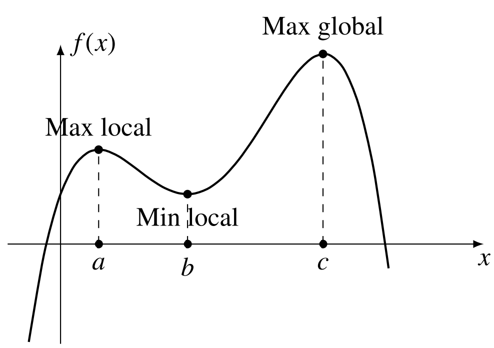
pour tout x assez près de a (c'est à dire dans un intervalle ouvert $]c,d[$ contenant a).



Note. Un extrémum global est automatiquement un extrémum local. Par exemple, si $f(a) \geq f(x)$ pour tout $x \in \text{dom}(f)$, alors $f(a) \geq f(x)$ pour tout x dans le domaine de la fonction, y compris sur une restriction du domaine à un intervalle ouvert $]c,d[$

Note. Un extrémum global est aussi appelé **extrémum relatif** .

Exemple 4. La fonction suivante a un maximum global (qui est aussi un maximum local) en $x = c$ et un max local (qui n'est pas global) en $x = a$. Elle a aussi un minimum local en $x = b$, mais aucun minimum global.



1.4 Dérivées et extrémums

Si déterminer où une fonction a un maximum ou un minimum local sur son graphe est simple, le déterminer à partir de la définition de la fonction est généralement beaucoup plus complexe. Cependant, la dérivée est d'une aide précieuse : là un une fonction a un extrémum, la tangente est horizontale ou il n'y a pas de tangente du tout. Cela nous donne un critère pour déterminer où sont les extrémums locaux d'une fonction.

Définition. Une **valeur critique** c de la fonction f est un nombre c dans le domaine de f tel que

$$f'(c) = 0 \text{ ou } f'(c)\nexists.$$

Exemple 5. Déterminons les valeurs critiques de la fonction

$$f(x) = \frac{(x-1)}{x^2-1}.$$

On détermine les valeurs critiques de f.

$$f'(x) = \frac{(x^2-1)-(x-1)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2+2x-1}{(x^2-1)^2} = \frac{-(x-1)^2}{(x^2-1)^2}$$

On trouve les zéro de f' :

$$f'(x) = 0 \iff \frac{-(x-1)^2}{(x^2-1)^2} = 0 \iff -(x-1)^2 = 0 \iff x = 1.$$

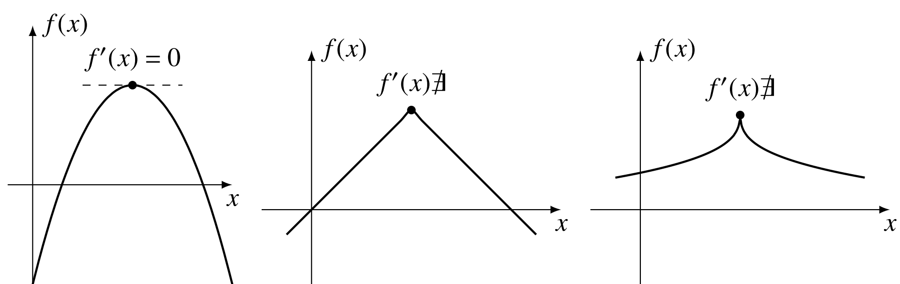
Mais si $x = 1$, le dénominateur s'annule : $(x^2-1) = 0$. La fonction f' n'a donc pas de zéros.

On trouve les valeurs de x où f' n'est pas définie.

$$f'(x)\nexists \iff \frac{-(x-1)^2}{(x^2-1)^2}\nexists \iff x^2-1 = 0 \iff x = \pm 1.$$

Les valeurs critiques de f sont $x = \pm 1$.

Théorème (Fermat généralisé)**.** Si $f(x)$ a un minimum ou un maximum local en $x = c$, alors c est une valeur critique de f.



Le théorème de Fermat généralisé nous permet de limiter la recherche des extrémum d'une fonction f aux valeurs où $f'(x)$ s'annule ou n'existe pas. La proposition suivante permet de déterminer le type d'extrémum en étudiant le signe de $f'(x)$.

Proposition 1. Si $f'(c) = 0$, alors

a) f a un maximum en $x = c$ si f' change de signe de positif à négatif en $x = c$
b) f a un maximum en $x = c$ si f' change de signe de négatif à positif en $x = c$

Exemple 6. Déterminons les maximums et les minimums globaux de la fonction

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 2x + 1.$$

On commence par trouver les valeurs critiques de f.

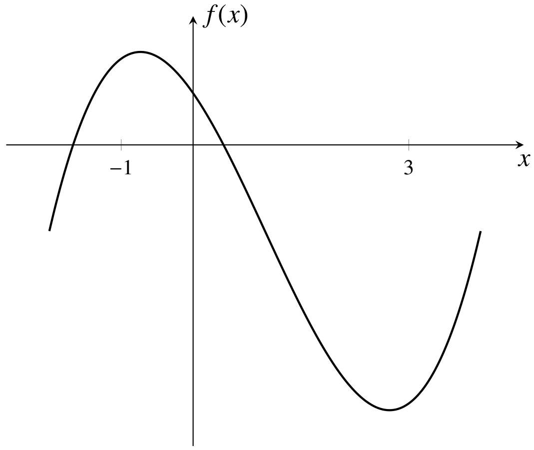
$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = -1.$$

$f'(x)$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, il n'y a donc pas de point critique où $f'(x)\nexists$.

On fait un tableau de signe pour $f'(x)$ pour déterminer les intervalles de croissance et de décroissance de $f(x)$. Notons que $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$, ce qui facilite la détermination du signe de $f'(x)$.

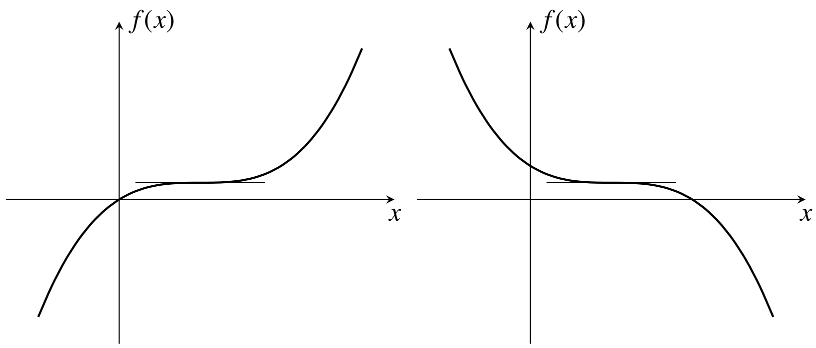
x	$-\infty$		-1		3		∞
$(x+1)$		-	0	+	+	+	
$(x-3)$		-	-	-	0	+	
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	∞

Enfin, le graphe de f est le suivant :



1.4.1 Points stationnaires

Le graphe d'une fonction peut avoir une tangente horizontale à un point qui n'est ni un maximum, ni un minimum. On appelle un tel point un **point stationnaire**.



> **Définition.** Une fonction f a un **point stationnaire** en $x = a$ si $f'(a) = 0$ et $f'(x)$ ne change pas de signe en $x = a$.

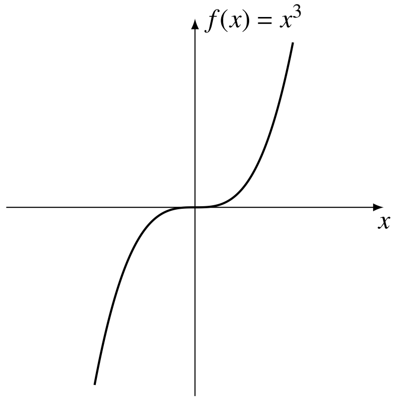
Exemple 7. Déterminons maximums et minimums de $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Il n'y a aucun point où $f'(x)\nexists$.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x) = 3x^2$	∞	+	0	+	∞
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	STA	$\nearrow$	∞

$f(x)$ a un point stationnaire en $x = 0$.



Exemple 8. On analyse la fonction définie par
$$f(x) = \frac{x-2}{2x-1}.$$

Le domaine de la fonction est $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$.

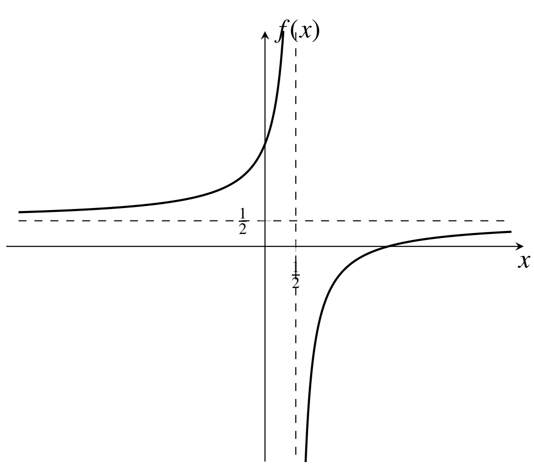
On a que
$$f'(x) = \frac{(2x-1)-2(x-1)}{(2x-1)^2} = \frac{1}{(2x-1)^2}.$$
Ainsi il est impossible que $f'(x) = 0$ puisque le numérateur est 1. Mais il y a une division par 0 quand $x = 1/2$. Donc la dérivé n'existe pas si $x = 1/2$; cette valeur est une valeur critique.

On a aussi que $\frac{1}{(2x-1)^2} \geq 0$.

Il y a une asymptote verticale en $x = 1/2$.
$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{-3/2}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{x-2}{2x-1} = \frac{-3/2}{0^-} = +\infty$$

Il y a une asymptote horizontale en $y = 1/2$:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{2x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x(1-2/x)}{x(2-1/x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1-2/x)}{(2-1/x)} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{2x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1-2/x)}{x(2-1/x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{(1-2/x)}{(2-1/x)} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$		$1/2$		∞
$f'(x)$		$+$	$\nexists$	$+$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\nexists$:AV	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$



1.4.2 Tangentes verticales et points de rebroussements

Définition. Un point où $\lim_{x\to a} f'(x) = \pm\infty$ est un point où la tangente au graphe de la fonction est verticale.

Un point où $\lim_{x\to a^-} f'(x) = \pm\infty$ et $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \mp\infty$ (les limites infinies sont de signes contraires) est appelé un **point de rebroussement**.

Un point où la tangente est verticale est donc un point où la pente de la tangente devient infinie. La tangente est donc de « pente infinie, » ce qui veut dire que la tangente en ce point est verticale.

Exemple 9. Analysons la croissance et la décroissance de $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

La dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0$$

Cette équation n'a aucune solution car il faudrait que le numérateur s'annule.

Il y a une seule valeur de x où $f'(x)\nexists$: en $x = 0$.

La seule valeur critique est donc $x = 0$.

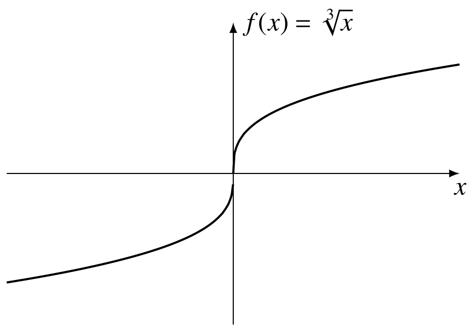
On étudie le comportement de la dérivée près de $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^+)^2}} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(0^-)^2}} = \infty$$

Il y a donc une tangente verticale en $x = 0$.

Le tableau de croissance est le suivant.

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$+$	∞	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	T.V.	$\nearrow$	∞



Exemple 10. Analysons la croissance et la décroissance de $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$.

La dérivée de f est $f'(x) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x-2}}$.

$$f'(x) = 0 \iff \frac{2}{3\sqrt[3]{x-2}} = 0.$$

Cette équation n'a aucune solution car il faudrait que le numérateur s'annule.

Il y a une seule valeur de x où $f'(x)\nexists$: en $x = 2$.

La seule valeur critique est donc $x = 2$.

On étudie le comportement de la dérivée près de $x = 2$:

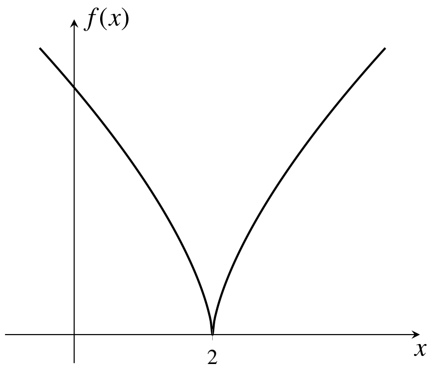
$$\lim_{x\to 2^+} f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{2^+ - 2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{0^+}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{2^- - 2}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{0^-}} = -\infty$$

Il y a donc un point de rebroussement en $x = 2$.

Le tableau de croissance est le suivant.

x	$-\infty$		2		∞
$f'(x)$		-	$\pm\infty$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\searrow$	P.R.	$\nearrow$	∞



Exemple 11. Étudions la croissance et les asymptotes de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}.$$

Premièrement, le domaine de f est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ car il y a une division par zéro en $x = 1$.

Calculons la dérivée :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x^2 + 2x + 3}{x - 1}\right)' \\
&= \frac{(2x + 2)(x - 1) - (x^2 + 2x + 3)}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{2x^2 + 2x - 2x - 2 - x^2 - 2x - 3)}{(x - 1)^2} \\
&= \frac{x^2 - 2x - 5}{(x - 1)^2}
\end{aligned}$$

On factorise $x^2 - 2x - 5$ en trouvant les zéros à l'aide de la formule quadratique : $x^2 - 2x - 5 = 0$ si

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-4)}}{2} \\
&= \frac{2 \pm \sqrt{24}}{2} \\
&= \frac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2} \\
&= 1 \pm \sqrt{6}
\end{aligned}$$

On obtient donc la factorisation

$$x^2-2x-5=\left(x-\left(1+\sqrt{6}\right)\right)\left(x-\left(1+\sqrt{6}\right)\right),$$

Ce qui permet enfin d'écrire la dérivée f' de la manière suivante :

$$f'(x)=\frac{\left(x-\left(1+\sqrt{6}\right)\right)\left(x-\left(1+\sqrt{6}\right)\right)}{(x-1)^2}.$$

On cherche les valeurs critiques de f'. On a que $f'(x)=0$ si $x=1\pm\sqrt{6}$. De plus, $f'(x)\nexists$ si $x=1$ car il y a un division par zéro quand $x=1$.

On peut faire le tableau de variation de f.

x		$1-\sqrt{6}$		1		$1+\sqrt{6}$	
$(x-(1-\sqrt{6}))$	-	0	+	+	+	+	+
$(x-(1+\sqrt{6}))$	-	-	-	-	-	0	+
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	+	0	-	∞	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

On ajoute les données concernant les asymptotes.

Pour les asymptotes horizontales, on a que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} f(x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x+3}{x-1}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}\\ &= \frac{\infty\left(1+\frac{2}{\infty}+\frac{3}{\infty^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{\infty}\right)}\\ &= \infty\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x+3}{x-1}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(1+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}\\ &= \frac{-\infty\left(1+\frac{2}{-\infty}+\frac{3}{(-\infty)^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{-\infty}\right)}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.

On vérifie s'il y a une asymptote verticale en $x = 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+2x+3}{x-1} \\
&= \frac{(1)^2+2(1)+3}{(1^+-1)} \\
&= \frac{6}{0^+} \\
&= \infty
\end{aligned}$$

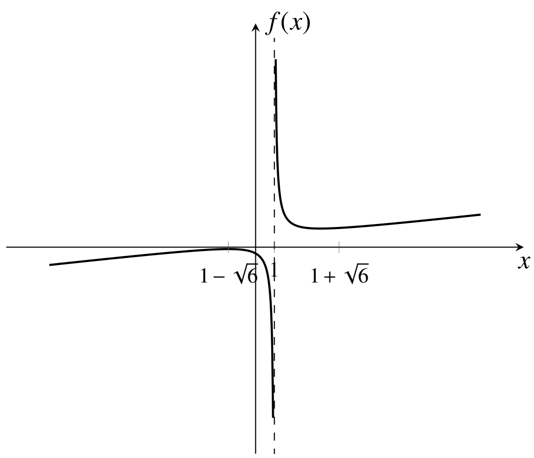
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+2x+3}{x-1} \\
&= \frac{(1)^2+2(1)+3}{(1^--1)} \\
&= \frac{6}{0^-} \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

La fonction a donc une asymptote verticale en $x = 1$.

On ajoute l'information concernant les asymptotes au tableau :

x	$-\infty$		$1-\sqrt{6}$		1		$1+\sqrt{6}$		∞
$f'(x)$		+	0	-	∞	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	AV	$\searrow$	MIN	$\nearrow$	∞

Enfin, on peut faire une esquisse de la fonction.



2 Extrémums sur un intervalle

> **Théorème.** Si f est continue sur l'intervalle $[a,b]$, alors il existe un $x \in [a,b]$ et un $d \in [a,b]$ tels que $f(c)$ est un maximum global sur $[a,b]$ et $f(d)$ est un minimum global sur $[a,b]$.

Note. Les maximums et mimimums globaux dépendent l'intervalle $[a,b]$ considéré.