Calcul différentiel — Étude des fonctions exponentielles et logarithmiques

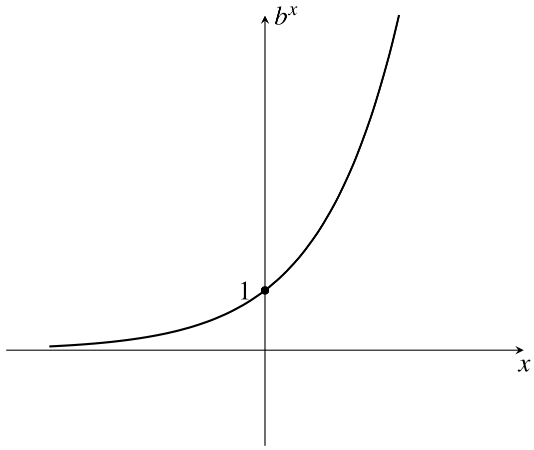
1 Fonctions exponentielles et logarithmiques

1.1 Fonctions exponentielles à base quelconque

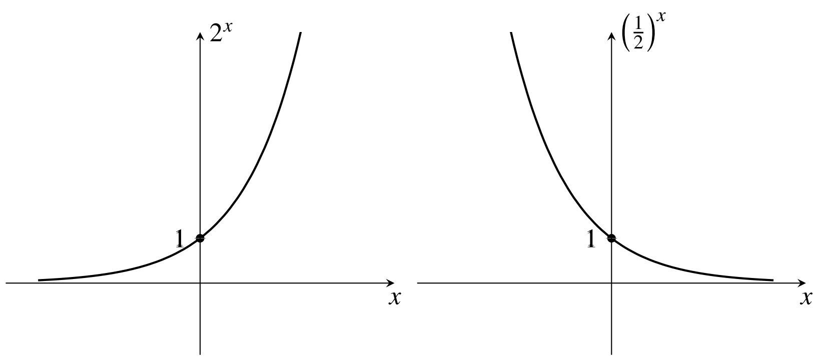
Définition. La **fonction exponentielle à base** b est définie par

$$f(x) = b^x,$$

où $b > 0$, $b \neq 1$.



Proposition 1. La fonction exponentielle à base b est une fonction croissante si $b > 1$ et décroissante si $b < 1$.



Proposition 2. Une fonction exponentielle de la forme b^x est toujours strictement positive :

$$b^x > 0 \text{ pour tout } x.$$

Note. La définition de fonction exponentielle suppose que l'on peut déterminer la valeur de b^x pour n'importe quel nombre réel x. Les propriétés des exposants permettent de déterminer b^x pour les nombres rationnels : si $a = \frac{n}{m}$ est un nombre rationnel quelconque, on sait que

$$b^a = b^{n/m} = \sqrt[n]{b^n}.$$

Si on ne définie pas b^a pour les nombres a qui ne sont pas rationnels, la fonction définie par b^x a des discontinuités non-essentielles pour en tout x non-rationnel ! Cependant, ces discontinuités peut être réparée de manière à rendre la fonction continue : il faut définir b^a par $\lim_{x \to a} b^x$, où $x \to a$ mais ne prend que des valeurs rationnelle où b^x est défini. Cela assure que

$$\lim_{x \to a} b^x = b^a,$$

c'est à dire que la fonction exponentielle à base b est continue en $x = a$.

En pratique, cela revient à évaluer b^a pour a non rationnel par des nombres rationnels.

Par exemple, si on veut déterminer la valeur de $3^{\sqrt{2}}$, on évalue la limite $\lim_{x \to \sqrt{2}} 3^x$ à l'aide approximation rationnelles de $\sqrt{2}$ comme dans le tableau suivant

x	x	$3^x \approx$
1	1	3
1.4	$\frac{14}{10}$	4.65553672174608
1.41	$\frac{141}{100}$	4.70696500171657
1.414	$\frac{1414}{1000}$	4.72769503526854
1.4142	$\frac{14142}{10000}$	4.72873393017119
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1.41421356	$\frac{141421356}{100000000}$	4.72880437550890
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$2^{\sqrt{2}}$

Résumé

1.2 Fonction logarithme

Le logarithme à base b est défini comme la fonction inverse de la fonction exponentielle à base b.

> **Définition.** La fonction logarithme à base b est la fonction inverse de l'exponentielle à base b ; elle est définie par
>
> $$\log_b(x) = y \iff b^y = x.$$
>
> La fonction logarithme est définie uniquement pour $x > 0$.

Exemple 1.

$$\log_2(8) = 3 \text{ car } 2^3 = 8$$
$$\log_{10}(100) = 2 \text{ car } 10^2 = 100$$
$$\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2 \text{ car } 3^{-2} = \frac{1}{9}$$
$$\log_5\left(\sqrt[3]{5}\right) = \frac{1}{3} \text{ car } 5^{1/3} = \sqrt[3]{5}$$

1.3 Résolution d'équations exponentielles et logarithmiques

Les logarithmes peuvent être utilisés pour résoudre des équations comportant des exponentielles et inversement.

Exemple 2. Pour résoudre l'équation $2^{x^2-2x-3} = 1$ on utilise la définition de logarithme pour transformer l'équation donnée sous forme logarithmique :

$$2^{x^2-2x-3} = 1 \iff \log_2(1) = x^2 - 2x - 3.$$

Comme $\log_2(1) = 0$ (car $2^0 = 1$), l'équation initiale est donc équivalente à l'équation

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

dont les solutions sont $x = 3$ et $x = -1$.

Exemple 3. Pour résoudre l'équation $\log_2\left(x^2 - 2x - 3\right) = 1$ on utilise la définition de logarithme pour transformer l'équation donnée sous forme exponentielle :

$$\log_2\left(x^2 - 2x - 3\right) = 1 \iff 2^1 = x^2 - 2x - 3.$$

Comme $2^1 = 2$, l'équation initiale est donc équivalente à l'équation

$$x^2 - 2x - 3 = 2,$$

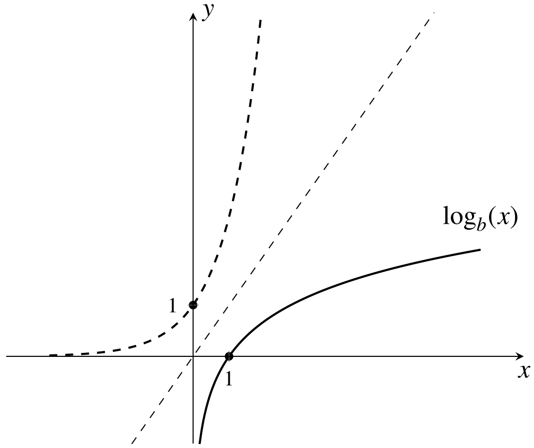
c'est à dire

$$x^2 - 2x - 5 = 0,$$

dont les solutions sont $x = 1 \pm \sqrt{6}$.

1.3.1 Graphique de la fonction logarithme

Comme la fonction logarithme est la réciproque de la fonction exponentielle, le graphe de la fonction logarithmique à base b est la réflexion par la droite $y = x$ du graphe de la fonction b^x. On note que le point (0,1) du graphe de la fonction exponentielle devient un zéro du graphe de la fonction logarithme : le point (1,0). De plus, l'asymptote horizontale de e^x devient une une asymptote verticale de $\ln(x)$.



1.3.2 Propriétés des logarithmes

Proposition 3 (Propriétés des logarithmes)**.** La fonction logarithme a les propriétés suivantes :

(a) $\log_b(1) = 0$
(b) $\log_b(b^A) = A$
(c) $b^{\log_b(A)} = A$
(d) $\log_b(AB) = \log_b(A) + \log_b(B)$
(e) $\log_b(A^B) = B\log_b(A)$
(f) $\log_c(A) = \frac{\log_b(A)}{\log_b(c)}$ (Changement de base)

Démonstration.

(a) $b^0 = 1 \iff \log_b(1) = 0$
(b) $b^A = b^A \iff \log_b(b^A) = A$
(c) $\log_b(A) = \log_b(A) \iff b^{\log_b(A)} = A$
(d)
$$\begin{aligned} \log_b(AB) = \log_b(A) + \log_b(B) &\iff b^{\log_b(A)+\log_b(B)} = AB \\ &\iff b^{\log_b(A)} b^{\log_b(B)} = AB \\ &\iff AB = AB \end{aligned}$$
(e)
$$\begin{aligned} \log_b(A^B) = B\log_b(A) &\iff b^{B\log_b(A)} = A^B \\ &\iff \left(b^{\log_b(A)}\right)^B = A^B \\ &\iff A^B = A^B \end{aligned}$$
(f)
$$\begin{aligned} \log_c(A) = \frac{\log_b(A)}{\log_b(c)} &\iff \log_c(A)\log_b(c) = \log_b(A) \\ &\iff b^{\log_c(A)\log_b(c)} = A \\ &\iff \left(b^{\log_b(c)}\right)^{\log_c(A)} = A \\ &\iff c^{\log_c(A)} = A \\ &\iff A = A \end{aligned}$$
□

Note. Les propriétés des logarithmes (b) et (c) sont équivalente au fait que le logarithme est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.

Note. La propriété (d) est la raison pour laquelle les logarithme ont été introduit historiquement : le logarithme d'un produit devient une somme. Comme calculer la somme de deux nombres est beaucoup plus facile que calculer le produit de deux nombres, cette propriété a été extrêmement importante dans le calcul scientifique car elle a permit d'effectuer plus simplement les longs calculs nécessaires en astronomie par exemple.

Exemple 4. La propriété de changement de base permet de calculer le logarithme dans une base si on connait le logarithme dans une autre base. Par exemple si on peut determiner les valeurs de $\log_{10}(3)$ et de $\log_{10}(2)$, on peut determiner celle de $\log_2(3)$:

$$\log_2(3) = \frac{\log_{10}(3)}{\log_{10}(2)}.$$

Corollaire.

(a) $\log_b(A^{-1}) = -\log_b(A)$
(b) $\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b(A) - \log_b(B)$

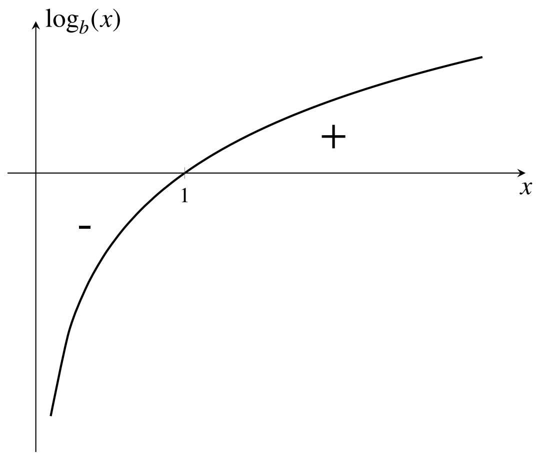
Démonstration.

(a) $\log_b\left(A^{-1}\right) = (-1)\log_b(A) = -\log_b(A)$
(b) $\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b\left(AB^{-1}\right) = \log_b(A) + \log_b\left(B^{-1}\right) = \log_b(A) - \log_b(B)$ □

1.3.3 Signe d'une expression comportant des logarithmes

L'observation suivante est utile pour faire l'analyse de fonctions comportant des logarithmes car elle permet de déterminer facilement le signe d'une fonction comportant des logarithmes si on la combine aux autres techniques de détermination de signe comme la factorisation.

Proposition 4. $\log_b(x)$ est positif si $x > 1$ et négatif si $0 < x < 1$.



Résumé

1.4 Limites des fonctions exponentielles et logarithmiques

L'évaluation de limites impliquant des fonctions exponentielles utilise l'hypothèse quelles sont continue sur $\mathbb{R}$.

Hypothèse. Les fonctions exponentielles sont continues sur $\mathbb{R}$.

Les fonctions logarithmes sont continues partout où elles sont définies.

Exemple 5.

$$\lim_{x\to 3} 2^x \overset{\text{cont}}{=} 2^3 = 8.$$

$$\lim_{x\to 8} \log_2(x) \overset{\text{cont}}{=} \log_2(8) = 3.$$

$$\lim_{x\to 2} 3^x \overset{\text{cont}}{=} 3^2 = 9$$

$$\lim_{x\to -2} 3^x \overset{\text{cont}}{=} 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} 3^x \overset{\text{cont}}{=} 3^{1/2} = \sqrt{3}$$

L'évaluation de limites comportant ∞ et des fonctions exponentielles repose sur le fait que la droite $y = 0$ est une asymptote horizontale des fonctions exponentielles. On peut ajouter les règles suivantes à l'« arithmétique de l'infini. »

Proposition 5. Si $1 < b$, alors

$$\lim_{x\to\infty} b^x = b^\infty = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} b^x = b^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} \log_b(x) = \log_b(\infty) = \infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \log_b(x) = \log_b(-\infty)\nexists$$

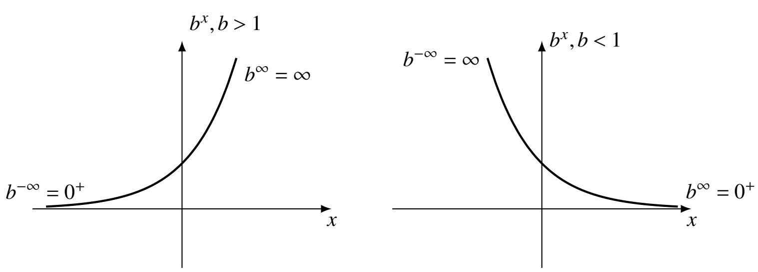
$$\lim_{x\to 0^+} \log_b(x) = \log_b(0^+) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \log_b(x) = \log_b(0^-)\nexists$$

Si $0 < b < 1$, alors

$$\lim_{x\to\infty} b^x = b^\infty = 0 \qquad \lim_{x\to-\infty} b^x = b^{-\infty} = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \log_b(x) = \log_b(\infty) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} \log_b(x) = \log_b(-\infty)\nexists$$

$$\lim_{x\to 0^+} \log_b(x) = \log_b(0^+) = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-} \log_b(x) = \log_b(0^-)\nexists$$



$$b^\infty = \begin{cases} \infty \text{ si } b > 1 \\ 1 \text{ si } b = 1 \\ 0 \text{ si } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Exemple 6.

$$\lim_{x\to-\infty} 2^{x+1} = 2^{-\infty+1} = 2^{-\infty} = 0$$

Exemple 7.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^\infty = 0 \text{ car } 0 < \frac{1}{2} < 1.$$

On pourrait aussi calculer cette limite de la manière suivante.

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2^x} = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

1.4.1 Asymptotes verticales d'une fonction comportant un logarithme

Comme on sait que la fonction $\log_b(x)$ a une asymptote verticale en $x = 0$, on peut déterminer quand des fonctions plus générale comportant des logarithmes ont des asymptotes verticales.

Une fonction définie par une expression de la forme $\log_b(A)$ a des asymptotes verticales quand $A \to 0^+$.

Exemple 8. La droite $x = 3$ est une asymptote verticale de la fonction $f(x) = \log_2(x-3)$

$$\lim_{x\to 3^+} \log_2(x-3) = \log_2(3^+ - 3) = \log_2(0^+) = -\infty.$$

Exemple 9. On cherche les asymptotes verticales de $f(x) = \log_2\left(x^2 - 2x - 3\right)$. On a que $x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0$ si $x = 3$ ou si $x = -1$. On vérifie que la fonction f a des asymptotes verticales en $x = 3$ et $x = -1$:

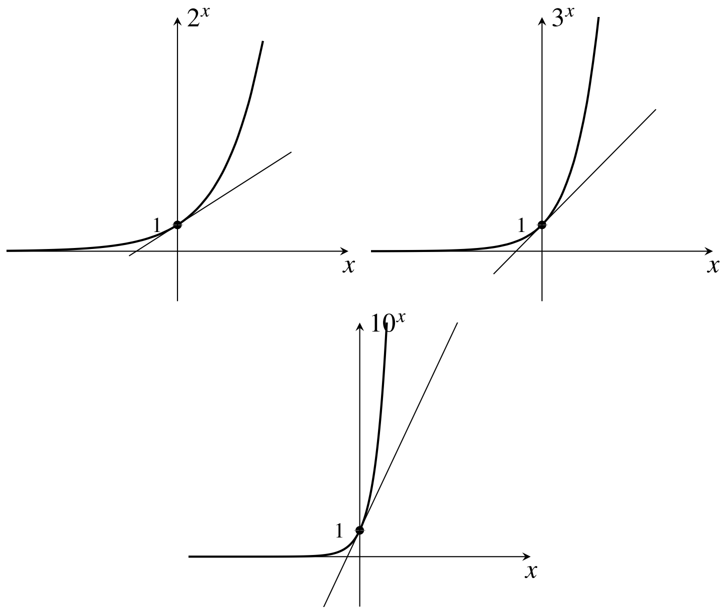
$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3^+} \log_2\left(x^2 - 2x - 3\right) &= \lim_{x\to 3^+} \log_2\left((x-3)(x+1)\right) \\
&= \log_2\left((3^+ - 3)(3^+ + 1)\right) \\
&= \log_2\left((0^+)(4)\right) \\
&= \log_2\left(0^+\right) \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to (-1)^-} \log_2\left(x^2 - 2x - 3\right) &= \lim_{x\to (-1)^-} \log_2\left((x-3)(x+1)\right) \\
&= \log_2\left(((-1)^- - 3)((-1)^- + 1)\right) \\
&= \log_2\left(-4)(0^-)\right) \\
&= \log_2\left(0^+\right) \\
&= -\infty.
\end{aligned}$$

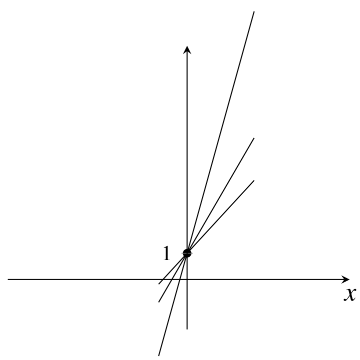
Résumé

2 La constante d’Euler

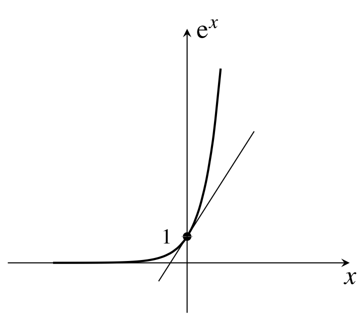
Si on change la base d’une fonction exponentielle, la pente de la tangente en $x = 0$ varie.



Pour comparer les trois tangentes, voici un graphique où elles sont superposées.



On suppose qu’il y a une base particulière qui fait en sorte que cette tangente est de pente 1 : on dénote cette base par e.



Définition. La **constante d’Euler** e est la base de la fonction exponentielle $f(x) = \mathrm{e}^x$ telle que la pente au point (0,1) du graphe de f est 1.

Autrement dit, la constante d’Euler est le nombre e tel que $(\mathrm{e}^x)'\big|_{x=0} = 1$.

Note. Plusieurs ouvrages utilisent la notation « $\exp(x)$ » pour dénoter la fonction exponentielle à base e : e^x. Les deux notations sont équivalentes :

$$\exp(x) = \mathrm{e}^x.$$

2.1 Autres définitions équivalentes de la constante d'Euler

Les résultats qui suivent pourraient être pris comme définition de e^x. Nous ne démontrerons pas dans ces notes l'équivalence entre ces différentes définitions de e^x mais nous croyons qu'elles illustrent bien la richesse de cette fonction.

À l'aide d'une limite :

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Cette définition a pour conséquence que la constante d'Euler e peut être calculée à l'aide de la limite suivante :

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

On peut constater à quelle « vitesse » cette suite converge dans le tableau suivant.

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	$\approx$
1	2	2.00000000000000
2	$\frac{9}{4}$	2.25000000000000
3	$\frac{64}{27}$	2.37037037037037
4	$\frac{625}{256}$	2.44140625000000
5	$\frac{7776}{3125}$	2.48832000000000
6	$\frac{117649}{46656}$	2.52162637174211
7	$\frac{2097152}{823543}$	2.54649969704071
8	$\frac{43046721}{16777216}$	2.56578451395035
9	$\frac{1000000000}{387420489}$	2.58117479171320
10	$\frac{25937424601}{10000000000}$	2.59374246010000
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$\vdots$	2.70481382942153
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1000	$\vdots$	2.71692393223589
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	e	e

On peut aussi définir e^x à l'aide d'une *série de Taylor* (notion vue en calcul intégral) :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

En posant $x = 1$ dans cette définition, on obtient :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots$$

Le tableau de convergence suivant montre que cette série donne beaucoup plus rapidement des approximation précises.

n	$1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots$	$\approx$
0	1	1.00000000000000
1	2	2.00000000000000
2	$\frac{5}{2}$	2.50000000000000
3	$\frac{8}{3}$	2.66666666666667
4	$\frac{65}{24}$	2.70833333333333
5	$\frac{163}{60}$	2.71666666666667
6	$\frac{1957}{720}$	2.71805555555556
7	$\frac{685}{252}$	2.71825396825397
8	$\frac{109601}{40320}$	2.71827876984127
9	$\frac{98641}{36288}$	2.71828152557319
10	$\frac{9864101}{3628800}$	2.71828180114638
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
100	$\vdots$	2.71828182845905
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1000	$\vdots$	2.71828182845905
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
∞	e	e

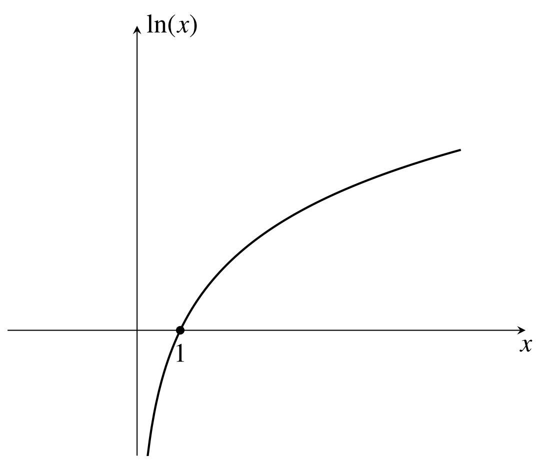
Résumé

3 Fonction exponentielle à base e et logarithme naturel

Comme nous avons vu à la dernière section, la fonction exponentielle à base e est particulière. Sa fonction réciproque est le logarithme naturel.

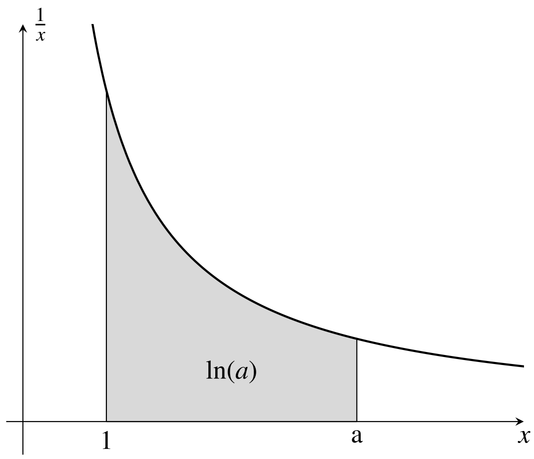
Définition. Le **logarithme naturel** est la fonction inverse de l'exponentielle à base e. La fonction ln est définie comme la fonction réciproque à la fonction exponentielle à base e, comme le logarithme à base b est la réciproque de la fonction exponentielle à base b.

$$\ln(y) = x \iff \mathrm{e}^x = y$$



3.1 Définition alternative de logarithme naturel

La première définition historique du logarithme naturel est que $\ln(a)$ est l'aire entre le graphe de la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$ et l'axe des x comprise entre $x = 1$ et $x = a$.



La fonction $\ln(x)$ a été initialement définie de cette manière par John Napier au 17e siècle car elle a la propriété suivante par construction géométrique.

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B).$$

La fonction $\ln(x)$ transforme donc les produits en somme. Cette propriété est très utile pour simplifier le calcul de produits : au lieu de calculer le produit de AB,on calcule la somme de $\ln(A)$ et $\ln(B)$, ce qui est beaucoup plus facile, surtout si on a sous la main une table de logarithmes comme celle calculée par Napier.

Exemple 10. Supposons que l'on veut calculer le produit de 81237.21 par 74923.38 avec l'algorithme usuel de multiplication. En consultant une table de logarithmes Neperiens, on trouve

$$\ln(81237.21) \approx 11.30513 \qquad \ln(74923.38) \approx 11.22422.$$

En additionnant :

$$\ln(81237.21) + \ln(74923.38) \approx 11.30513 + 11.22422 = 22.52935.$$

On retourne dans la table de logarithme pour déterminer quel nombre a 22.52935 comme logarithme. On trouve

$$6086566703.45156.$$

Multiplier les nombres donne

$$6086566354.96980$$

L'erreur relative est infime : moins de 0.0000006 % !

Pour bien comprendre à quel point cette technique facilite les calculs, tenter de multiplier les nombres sans calculatrice, ensuite tenter le même calcul en additionnant les logarithmes.

Comment Napier a-t-il pu calculer sa première table de logarithmes ? Il a utilisé une formule déduite de sa construction géométrique lui permettant de calculer près de 10 millions de valeurs de logarithmes, un travail colossal étalé sur 20 ans.

Aujourd'hui, on peut calculer ces valeurs en utilisant l'identité

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

elle même déduite de identité suivante :

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

Remarquez que si on dérive le membre droite de l'identité pour $\ln(x+1)$, on obtient le membre de droite de cette dernière égalité !

Note. Avant la création les logarithmes, on utilisait déjà l'idée de transformer les produits en sommes pour simplifier les calculs de produit, mais en utilisant plutôt des identités trigonométriques telles que

$$\sin(A)\cos(B) = \frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{2}$$

qui permet de transformer le produit (à gauche) en deux sommes, une différence et une division par 2 (à droite). Ces calculs pouvaient se faire à l'aide de tables des valeurs de sinus et cosinus !

Résumé

4 Propriétés de la fonction exponentielle à base e et du logarithme naturel

La base e est une base particulière qui donne à la fonction exponentielle e^x une propriété spécifique. Toutes les propriétés des fonctions exponentielle et logarithme à base quelconque b sont aussi vraies pour la base e.

Proposition 6. La fonction exponentielle à base e et le logarithme naturel ont les mêmes propriété que les fonctions exponentielle à base b et que les logarithmes à base b.

En particulier, ces fonctions ont les propriétés suivantes :

$$\ln(\mathrm{e}) = 1 \qquad \ln(\mathrm{e}^x) = x \qquad \mathrm{e}^{\ln(x)} = x.$$

On peut aussi évaluer des limites comportant la base e à l'aide des propriétés générales des limites des fonctions exponentielles et logarithmes.

Exemple 11.

$$\lim_{x\to 3} \mathrm{e}^x \overset{\text{cont}}{=} \mathrm{e}^3$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}} \mathrm{e}^x \overset{\text{cont}}{=} \mathrm{e}^{1/2} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

$$\lim_{x\to 5^+} \ln(x-5) = \ln(5^+-5) = \ln(0^+) = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{\ln(x-3)} = \frac{1}{\ln(3^+-3)} = \frac{1}{\ln(0^+)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

5 Dérivé des fonctions exponentielles

5.1 Dérivée de la fonction exponentielle à base e

La fonction exponentielle à base e a la propriété particulière d'être sa propre dérivée.

Proposition 7. La dérivée de la fonction exponentielle à base e est donnée par

$$\left(\mathrm{e}^{x}\right)' = \mathrm{e}^{x}.$$

On peut démontrer la validité de cette règle de dérivation à partir de la définition liant la constante d'Euler et la pente de la tangente à e^x en $x = 0$.

Preuve à l'aide des différentielles. Par définition de la constante e, on suppose que la pente de la tangente à la courbe $y = \mathrm{e}^x$ en $x = 0$ est 1. Par la définition de dérivée, cette pente est

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{\mathrm{e}^{0+dx}-\mathrm{e}^{0}}{dx} = 1$$

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\mathrm{e}^{x+dx}-\mathrm{e}^{x}}{dx}\\
&= \frac{\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{dx}-\mathrm{e}^{x}}{dx}\\
&= \mathrm{e}^{x}\frac{\mathrm{e}^{dx}-1}{dx}\\
&= \mathrm{e}^{x}\frac{\mathrm{e}^{dx}-\mathrm{e}^{0}}{dx}.\\
&= \mathrm{e}^{x}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}\\
&= \mathrm{e}^{x}(1)\\
&= \mathrm{e}^{x}.
\end{aligned}$$

□

Preuve avec la définition de dérivée à l'aide de limites. Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$. On a alors que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x+\Delta x}-\mathrm{e}^{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\Delta}x-\mathrm{e}^{x}}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x}\left(\mathrm{e}^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}\\
&= \mathrm{e}^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}\\
&= \mathrm{e}^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{0+\Delta x}-\mathrm{e}^{0}}{\Delta x}\\
&= \mathrm{e}^{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{0+\Delta x}-\mathrm{e}^{0}}{\Delta x}\\
&= \mathrm{e}^{x}f'(0)
\end{aligned}$$

□

Exemple 12.

$$\left(\mathrm{e}^{2x}\right)' = \mathrm{e}^{2x}(2x)' = 2\mathrm{e}^{2x}.$$

Exemple 13.

$$\left(x^2\mathrm{e}^{x}\right)' = (x^2)'\mathrm{e}^{x} + x^2\mathrm{e}^{x} = 2x\mathrm{e}^{x} + x^2\mathrm{e}^{x} = x(2+x)\mathrm{e}^{x}$$

Exemple 14.

$$\begin{aligned}\left(\mathrm{e}^{3x^2+1}\right)' &= \mathrm{e}^{3x^2+1}\left(3x^2+1\right)' \\ &= \mathrm{e}^{3x^2+1}\,(6x) \\ &= 6x\mathrm{e}^{3x^2+1}\end{aligned}$$

5.2 Dérivée d'une fonction exponentielle à base quelconque

On peut utiliser l'identité $b^x = e^{ln(b^x)}$ pour calculer la dérivée d'une fonction exponentielle à base quelconque à partie de la dérivée d'une fonction exponentielle à base e.

Proposition 8.

$$\left(b^x\right)' = b^x \ln(b)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}(b^x)' &= \left(\mathrm{e}^{\ln(b^x)}\right)' && \left(\mathrm{e}^{\ln(A)} = A\right) \\ &= \left(\mathrm{e}^{x\ln(b)}\right)' && \left(\ln\left(A^B\right) = B\ln(A)\right) \\ &= \mathrm{e}^{\ln(b^x)}(\ln(b)) && \text{(Règle de chaine)} \\ &= b^x \ln(b) && \left(\mathrm{e}^{\ln(A)} = A\right)\end{aligned}$$

□

Exemple 15.

$$\left(2^x + x^2\right)' = 2^x \ln(2) + 2x.$$

Note. Il ne faut pas confondre une fonction puissance comme x^n avec une base x variable, et une fonction exponentielle b^x où l'exposant est variable. Ainsi, une erreur à éviter est

Exemple 16.

$$\left(2^{2x}\right)' = 2^{2x}\ln(2)(2x)' = 2\ln(2)2^{2x}.$$

Exemple 17.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^4}{3^{2x}}\right)' &= \frac{4x^3 3^{2x} - x^4 3^{2x}\ln(3)(2)}{(3^{2x})^2} \\ &= \frac{2x^3 3^{2x}(2-\ln(3)x)}{(3^{2x})^2}. \\ &= \frac{2x^3(2-\ln(3)x)}{3^{2x}}.\end{aligned}$$

Résumé

6 Dérivée des fonctions logarithmiques

Proposition 9. La dérivée du logarithme naturel est donnée par

$$\Big(\ln(x)\Big)' = \frac{1}{x}.$$

Preuve à l'aide la dérivation implicite. Si on connait la dérivée de e^x, alors on trouve la dérivée de $\ln(x)$ par dérivation implicite à partir de l'identité $e^{\ln(x)} = x$.

$$\begin{aligned} e^{\ln(x)} &= x \\ \Big(e^{\ln(x)}\Big)' &= \Big(x\Big)' \\ e^{\ln(x)}\Big(\ln(x)\Big)' &= 1 \\ x\Big(\ln(x)\Big)' &= 1 \\ \Big(\ln(x)\Big)' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

□

Exemple 18.

$$\Big(\ln(x-3)\Big)' = \frac{1}{x-3}\,(x-3)' = \frac{1}{x-3}(x) = \frac{x}{x-3}.$$

Exemple 19.

$$(x\ln(x))' = \ln(x) + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x) + 1.$$

Exemple 20.

$$\Big(\ln\big(x^2\big)\Big)' = \frac{1}{x^2}\big(x^2\big)' = \frac{1}{x^2}(2x) = \frac{2}{x}.$$

Exemple 21.

$$\Big(\ln(-x^2+x+1)\Big)' = \frac{1}{-x^2+x+1}(-x^2+2+1)' = \frac{-2x+1}{-x^2+x+1}$$

Exemple 22.

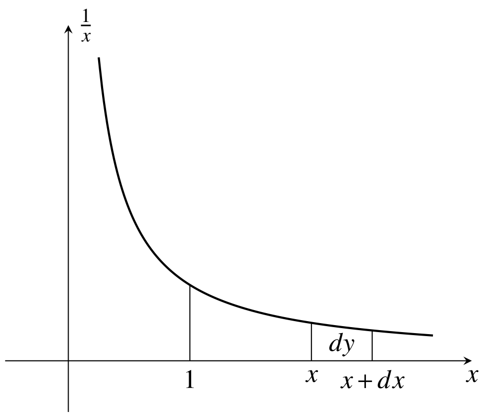
$$\Big(x^3\ln(2x)\Big)' = 3x^2\ln(2x) + x^3\frac{2}{2x} = x^2(3\ln(2x)+1)$$

Preuve géométrique de la proposition 9 à l'aide de différentielles.

Si $y = \ln(x)$ est l'aire sous la courbe $y = \frac{1}{x}$, alors

$$dy = \ln(x+dx) - \ln(x)$$

est l'aire représentée dans le graphe suivant :



Quand dx est très petit, l'aire de la région dy entre les valeurs x et $x+dx$ est approximativement celle du rectangle de base dx et de hauteur $1/x$.

$$dy \approx \frac{1}{x}\,dx.$$

On a donc que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}. \qquad \square$$

Preuve de la proposition 9 avec la définition de dérivée à l'aide de limites.

Cette preuve directe utilise la définition de e comme la limite suivante :

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

On utilise aussi la continuité de la fonction $\ln(x)$, qui implique l'égalité suivante :

$$\lim_{x\to a}\ln(f(x)) = \ln\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).$$

$$\begin{aligned}
\left(\ln(x)\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\ln\left(\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(\left(1+\frac{1}{x/\Delta x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)\\
&= \frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\\
&= \frac{1}{x}\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)\\
&= \frac{1}{x}\ln(\mathrm{e})\\
&= \frac{1}{x} \qquad \square
\end{aligned}$$

Résumé

6.1 Dérivée de fonction réciproques

La preuve à l'aide de dérivation implicite peut être généralisée à n'importe quelle paire de fonctions réciproques. Comme plusieurs des formules de dérivation sont des variantes de cet exemple, on peut faire de cette généralisation une proposition générale.

Proposition 10. Si g est la fonction inverse de f, c'est-à-dire si

$$g(f(x)) = x \text{ et } f(g(y)) = y,$$

alors

$$(g(y))' = \frac{1}{f'(g(y))} \text{ et } (f(x))' = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

En utilisant la notation différentielle avec $y = f(x)$ et $x = g(y)$, cet énoncé s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

Démonstration. Supposons que g est la fonction réciproque de f, c'est à dire que $g(f(x)) = x$ et que $f(g(y)) = y$. En dérivant à l'aide de la règle de chaine, on trouve que

$$\begin{aligned} g(f(x))) &= x \\ (g(f(x)))' &= (x)' \\ g'(f(x))f'(x) &= 1 \\ g'(y) &= \frac{1}{f'(x)} \\ g'(y) &= \frac{1}{f'(g(y))} \end{aligned}$$

On fait de même pour démontrer que

$$(f(x))' = \frac{1}{g'(f(x))}.$$

Comme $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$ et que $g'(y) = \frac{dx}{dy}$ et que

$$f'(g(y)) = f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

on a que

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}.$$

□

Exemple 23. Considérons la fonction définie par $f(x) = x^3$ et son inverse $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Comme la dérivée de f est

$$f'(x) = 3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2,$$

on a, par la proposition précédente, que

$$g'(x) = \frac{1}{3x^2}.$$

On peut vérifier ce résultat en dérivant directement $g(x)$:

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{1/3}\right)' = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

6.2 Dérivée de la fonction logarithme

On peut dérivée une fonction logarithme à base b quelconque à partir de la dérivée du logarithme naturel et du changement de base. En effet, le changement de la base du logarithme de la base b à la base e donne l'égalité

$$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$

On voit que $\log_b(x)$ diffère que $\ln(x)$ uniquement par la constante de proportionnalité $\frac{1}{\ln(b)}$.

Proposition 11 (Dérivée de la fonction logarithme)**.**

$$\left(\log_b(x)\right)' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln(b)}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(\log_b(x))' &= \left(\frac{\ln(x)}{\ln(b)}\right)' && \text{(Changement de base)}\\
&= \frac{1}{\ln(b)}(\ln(x))' && \left((C(f))' = Cf'(x)\right)\\
&= \frac{1}{\ln(b)}\frac{1}{x} && \left(\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}\right)\\
&= \frac{1}{x\ln(b)}
\end{aligned}$$

□

Exemple 24.

$$\left(\log_2(3x+1)\right)' = \frac{1}{(3x+1)\ln(2)}(3x+1)' = \frac{3}{(3x+1)\ln(2)}$$

Exemple 25.

$$\begin{aligned}
\left(x\log(x)\right)' &= (x)'\log(x) + x(\log(x))'\\
&= \log(x) + x\left(\frac{1}{x\ln(10)}\right)\\
&= \log(x) + \frac{1}{\ln(10)}
\end{aligned}$$

Résumé

6.3 Dérivé d'une puissance quelconque de x

La forme la plus générale pour la dérivée d'une puissance de x est valable pour un exposant réel quelconque. Nous avons précédemment obtenue une formule de dérivation valable uniquement pour les puissances rationnelles de x.

Proposition 12. La dérivée de la fonction $f(x) = x^r$ où $r \in \mathbb{R}$ est un nombre réel quelconque est

$$\left(x^r\right)' = rx^{r-1}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\left(x^r\right)' &= \left(\mathrm{e}^{\ln(x^r)}\right)' && \text{car } \mathrm{e}^{\ln(A)} = A \\
&= \left(\mathrm{e}^{r\ln(x)}\right)' && \text{car } \ln(A^B) = B\ln(A) \\
&= \mathrm{e}^{r\ln(x)}\left(r\ln(x)\right)' \\
&= \mathrm{e}^{\ln(x^r)}\frac{r}{x} && \text{car } \ln(A^B) = B\ln(A) \\
&= x^r\frac{r}{x} && \text{car } \mathrm{e}^{\ln(A)} = A \\
&= \frac{rx^r}{x} \\
&= rx^{r-1}
\end{aligned}$$

□

Exemple 26.

$$\begin{aligned}
\left(x^{\sqrt{2}}\right)' &= \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1} \\
\left(x^{\pi}\right)' &= \pi x^{\pi-1} \\
\left(x^{\mathrm{e}}\right)' &= \mathrm{e}x^{\mathrm{e}-1}.
\end{aligned}$$

Résumé

7 Analyse de fonctions comportant des fonctions exponentielles ou logarithmiques

Pour faire un tableau de variation d'une fonction comportant une fonction exponentielle ou logarithme, les inégalités suivantes sont utiles.

Proposition 13.

$$e^x > 0 \qquad b^x > 0 \qquad \begin{cases} \ln(x) > 0 & \text{si } x > 1 \\ \ln(x) < 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \log_b(x) > 0 & \text{si } x > 1 \\ \log_b(x) < 0 & \text{si } 0 < x < 1 \end{cases}$$

Exemple 27. Analyse de la fonction $f(x) = xe^x$, sachant que $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$.

Le domaine de f est $\mathbb{R}$ car xe^x est toujours défini.

Dérivée première et croissance

$$f'(x) = e^x + xe^x = (1+x)e^x$$

Valeurs critiques : $f'(x) = 0 \iff (x+1) = 0$ ou $e^x = 0$. $x = -1$ est la seule solution car $e^x > 0$ pour tout x.

$f'(x)$ existe toujours.

Dérivée seconde et concavité

$$f''(x) = e^x + (1+x)e^x = (x+2)e^x$$

Valeurs critiques : $f''(x) = 0$ si $x = -2$, $f''(x)$ existe toujours.

Asymptotes verticales Aucune car aucune division par 0.

Asymptotes horizontales

$$\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty \cdot e^\infty = \infty$$

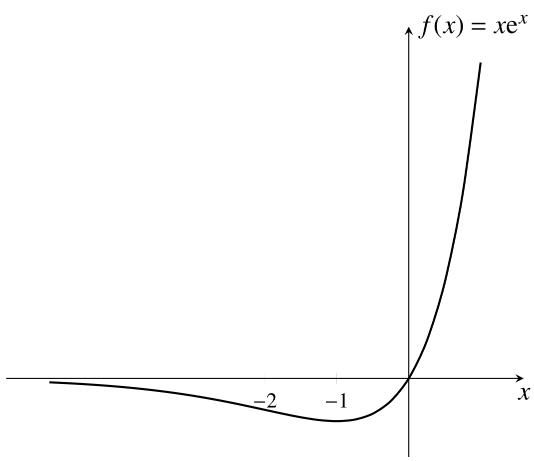
La donnée du problème nous indique que $y = 0$ est une asymptote horizontale :

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		-1		∞
$f'(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$f(x)$	0	↘	INF	↘	MIN	↗	∞

Graphe de la fonction



Exemple 28. Analyse de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, sachant que $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Le domaine de f est $]0,\infty[$ car $\ln(x)$ est défini seulement si $x > 0$.

Dérivée première et croissance

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)(1)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2} = -\frac{\ln(x)-1}{x^2}$$

Valeurs critiques :

- $f'(x) = 0 \iff \ln(x) = 1 \iff x = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$.
- $f'(x)\nexists$ si $x = 0$ car il y a une division par 0.

Dérivée seconde et concavité

$$f''(x) = -\frac{\left(\frac{1}{x}\right)x^2 - (\ln(x)-1)(2x)}{(x^2)^2} = -\frac{x-(2x\ln(x)+2x)}{x^4} = -\frac{x\big(3-2\ln(x)\big)}{x^4} = \frac{2\ln(x)-3}{x^3}$$

Valeurs critiques :

- $f''(x) = 0$ si $2\ln(x) - 3 = 0$, ou $\ln(x) = \frac{3}{2}$, ce qui donne $x = \mathrm{e}^{3/2} = \sqrt{\mathrm{e}^3}$.
- $f''(x)\nexists$ si $x = 0$ car il y a une division par 0.

Asymptotes verticales Division par 0 en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = \ln(0^+)\left(\frac{1}{0^+}\right) = (-\infty)(\infty) = -\infty$$

Il y a donc une AV en $x = 0$.

Asymptotes horizontales La donnée du problème nous indique que $y = 0$ est une asymptote horizontale :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Tableau de variation Pour comparer les valeurs critiques afin de les mettre en ordre croissant, notons que

$$\mathrm{e} = \sqrt{\mathrm{e}^2} < \sqrt{\mathrm{e}^3}$$

x	0		e		$\sqrt{\mathrm{e}^3}$		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	INF	$\searrow$	0

Graphe de la fonction