Calcul différentiel — Étude des fonctions trigonométriques inverses

1 Définition géométrique des fonctions trigonométriques inverses

Les fonctions trigonométriques inverses sont les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques. Elles permettent de résoudre des équations comportant des fonctions trigonométriques.

Par exemple, si on veut résoudre

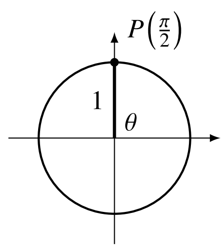
$$\sin(\theta) = 1$$

on trouve une infinité de solution :

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \frac{\pi}{2} + 4\pi, \ldots$$

Toutes ces solutions correspondent au même point dans le cercle trigo car

$$P\left(\frac{\pi}{2}\right) = P\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = P\left(\frac{5\pi}{2}\right) = P\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \ldots$$



La fonction arcsinus nous donne une de ces solutions, c'est à dire un des angles θ tels que $\sin(\theta) = 1$. Ce choix d'une solutions particulière parmis toutes les solutions possibles est nécessaire pour que arcsinus soit une fonction, car une fonction associe une seule valeur à une valeur donnée. On appelle cette valeur la « valeur principale ». Ainsi, on peut dire qu'on peut résoudre l'équation initiale avec la fonction arcsinus :

$$\theta = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}.$$

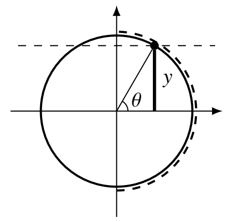
Cette valeur principale est toujours choisie pour donner une solution utile quand on résout des équations dans un contexte géométrique, où les angles cherchés sont souvent dans l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Afin de pouvoir évaluer une fonction trigonométrique inverse, il faut restreindre leur domaine aux valeurs obtenue en appliquant les fonctions trigonométriques correspondantes. Par exemple, comme $-1 \le \sin(x) \le 1$, la fonction $\arcsin(x)$ ne peut pas être définie pour des valeurs hors de l'intervalle $[-1, 1]$.

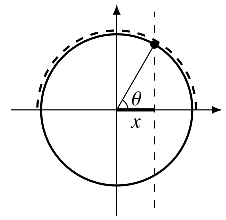
De plus, si on connait la valeur d'une fonction trigonométrique, il y a plusieurs angles différent qui correspondent à cette valeur. Pour que la fonction trigonométrique inverse soit une fonction, il faut choisir un seul de ces angles. Dans les définitions qui suivent, le choix de cet angles est toujours fait dans la partie du cercle trigonométrique indiquée en « traitillés ». Pour que les solutions soient géométriquement utiles, ce choix inclue toujours les angles θ dans le premier quadrant, c'est à dire tels que $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ et est prolongé de manière avoir une une valeur principale unique.

Définition. Les fonctions trigonométriques inverses sont définies par les équivalences suivantes. Les valeurs de ces fonctions sont choisies dans l'intervalle donné pour θ ; on appelle cette valeur la **valeur principale**.

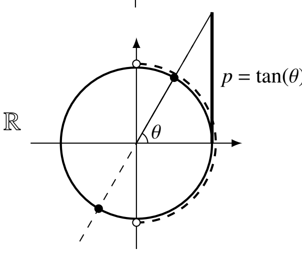
a) $\arcsin(y) = \theta \iff \sin(\theta) = y$, avec $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, $-1 \le y \le 1$



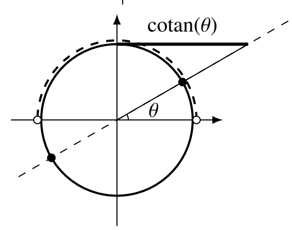
b) $\arccos(x) = \theta \iff \cos(\theta) = x$, avec $0 \le \theta \le \pi$ et $-1 \le x \le 1$



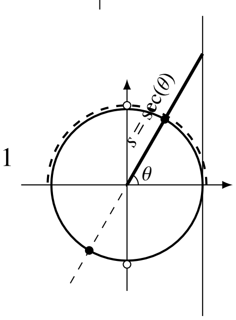
c) $\arctan(p) = \theta \iff \tan(\theta) = p$, avec $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ et $p \in \mathbb{R}$



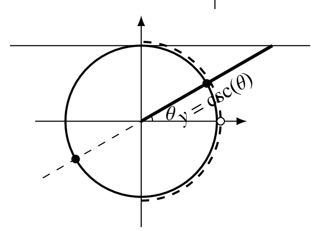
d) $\operatorname{arcctg}(q) = \theta \iff \operatorname{cotan}(\theta) = q$, avec $0 < \theta < \pi$ et $q \in \mathbb{R}$



e) $\operatorname{arcsec}(s) = \theta \iff \sec(\theta) = s$, avec $0 \le \theta \le \pi$, $\theta \ne \pi/2$ et $s \ge 1$ ou $s \le -1$.



f) $\operatorname{arccosec}(c) = \theta \iff \csc(\theta) = c$, avec $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$, $\theta \ne 0$



Remarque. Ne pas confondre les fonction trigonométriques inverses et les inverses de ces fonctions ! Par exemple,

$$\arcsin(x) \ne \frac{1}{\sin(x)} = \csc(x).$$

Cette confusion est fréquente pour deux raisons :

1. l'expression « fonction inverse » est synonyme de « fonction réciproque ». En général, la fonction réciproque de la fonction $f(x)$ n'est pas $\frac{1}{f(x)}$.

2. l'utilisation de la notation $\sin^{-1}(x)$, notamment sur certaines calculatrices, peut laisser penser que
$$\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sin(x)} \qquad \text{(Faux !)}$$
mais ce n'est pas le cas. Cette notation est utilisée pour dénoter « la fonction réciproque de sin » qui est arcsin et non pas « l'inverse de $\sin(x)$ qui est $\frac{1}{\sin(x)}$.

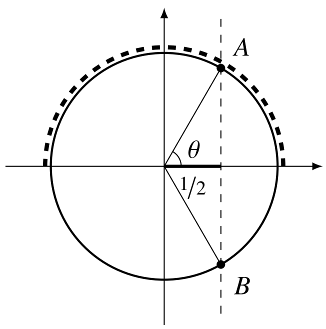
1.1 Évaluer les fonctions arcsin et arccos

Les fonctions arcsin et arccos peuvent être évaluée à l'aide du cercle trigonométrique en y identifiant la valeur principale.

Exemple 1. Déterminons $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$.

Par définition
$$\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \theta \iff \cos(\theta) = \frac{1}{2}$$

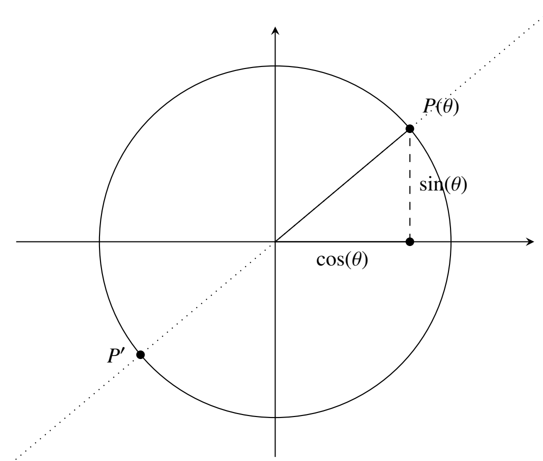
Comme $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$, la coordonnée en x du point $P(\theta)$ doit être $\frac{1}{2}$. On se trouve donc dans la situation suivante : il y a deux angles $-\pi \leq \theta \leq \pi$ satisfaisant cette relation, angle correspodant aux points A et B de la figure suivante.



Comme l'angle θ correspondant au point B n'est pas la valeur principale conventionnelle pour arccos, la solution est l'angle correspondant au point A. Comme le côté de longueur $\frac{1}{2}$ correspond au côté d'un des triangles remarquables, ont doit avoir $\theta = \frac{\pi}{3}$.

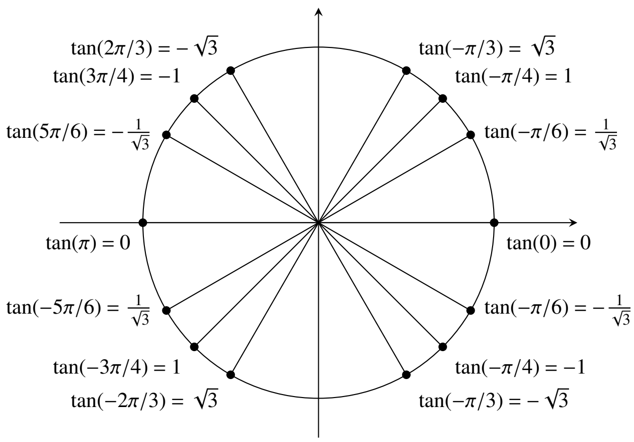
1.2 Évaluer la fonction arctan

Comme la fonction tangente est $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$, la tangente d'un angle θ est la pente de la droite passant par l'origine et le point $P(\theta)$. Cette droite est en pointillée dans la figure suivante :



Cette pente est la même si on considère le point $P' = P(\theta + \pi)$, situé à l'opposé de $P(\theta)$ sur le cercle trigonométrique.

On peut calculer les valeurs de $\tan(\theta)$ pour les angles usuels. Ces valeurs sont données dans la figure suivante.



Exemple 2. Évaluons $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. En consultant la figure précédente, on voit que $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. La valeur principale devant être dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, la valeur cherchée est

$$\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

2 Évaluation des autres fonctions trigonométriques inverses

On peut évaluer les autres fonctions trigonométriques inverses en utilisant celles qui ont déjà été vues.

Exemple 3. Évaluons asec(2). On cherche θ tel que $\sec(\theta) = 2$, c'est à dire

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} = 2.$$

En inversant chaque membre de cette égalité, a que

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}.$$

On trouve la valeur principale de cette équation comme nous avons vu précédemment. On trouve $\cos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$. On a donc que

$$\text{asec}(2) = \frac{\pi}{3}.$$

Note. Si fait ce dernier raisonnement de manière générale, on obtient que

$$\text{asec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right).$$

On obtient de la même manière que

$$\text{arccosec}(x) = \arcsin\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\text{arcctg}(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right).$$

3 Relations entre les fonctions trigonométriques et leurs inverses

Proposition 1.

$$\sin(\arcsin(y)) = y$$

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

$$\tan(\arctan(p)) = p$$

$$\vdots$$

Si θ est la valeur principale des fonction trigonométriques inverses impliquée, alors

$$\arcsin(\sin(\theta)) = \theta$$

$$\arccos(\cos(\theta)) = \theta$$

$$\arctan(\tan(\theta)) = \theta$$

$$\vdots$$

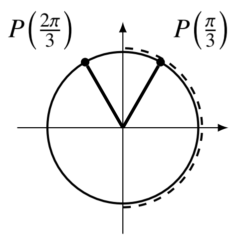
Exemple 4.

$$\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

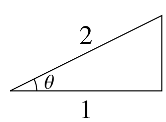
On peut voir pourquoi $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \neq \frac{2\pi}{3}$ dans le cercle trigo. Comme $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, la valeur de $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est la valeur principale et est $\frac{\pi}{3}$.



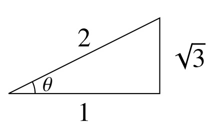
Ansi, on a que $\arcsin\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \neq \frac{2\pi}{3}$.

Exemple 5. Sachant que $\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$, trouver les valeurs de toutes les fonctions trigonométriques.

Solution : comme $\cos(\theta)$ doit être $\frac{1}{2}$, on peut supposer que θ est un angle dans le triangle suivant (car les valeurs des fonctions trigonométriques restent les même si on change l'échelle d'un triangle.)



Comme le triangle est rectangle, on peut trouver la mesure du côté manquant à l'aide du théorème de Pythagore.

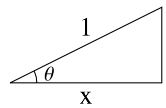


À l'aide de ce triangle, on trouve les valeurs des autres fonction trigonométriques :

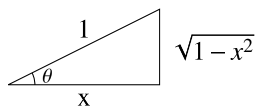
- $\sin(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$
- $\tan(\theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$
- $\sec(\theta) = \dfrac{2}{1} = 2$
- $\csc(\theta) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$
- $\cot(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Exemple 6. Sachant que $\theta = \arccos(x)$, trouver les valeurs de toutes les fonctions trigonométriques en fonction de x.

Solution : comme on doit avoir que $x = \cos(\theta)$, on peut supposer que θ est un angle dans le triangle suivant :



Comme le triangle est rectangle, on peut trouver la mesure du côté manquant à l'aide du théorème de Pythagore.



À l'aide de ce triangle, on trouve les valeurs des autres fonction trigonométriques en fonction de x :

- $\sin(\theta) = \sqrt{1-x^2}$
- $\tan(\theta) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- $\sec(\theta) = \dfrac{1}{x}$
- $\csc(\theta) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\cot(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Nous aurons besoin plus loin de la proposition suivante.

Proposition 2.

$$\operatorname{asec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Démonstration. Soit $\theta = \operatorname{asec}(x)$. Cet angle est la valeur principale de l'équation

$$\sec(\theta) = x$$

On doit donc avoir que $0 < \theta < \pi$.

Par la définition d'arcsecante, on doit avoir que

$$\sec(\theta) = x.$$

En inversant chacun des membres de cette égalité, on trouve

$$\begin{aligned} \sec(\theta) &= x \\ \frac{1}{\sec(\theta)} &= \frac{1}{x} \\ \cos(\theta) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Comme $0 < \theta < \pi.$, on a que $\arccos(\cos(\theta)) = \theta$. On a donc

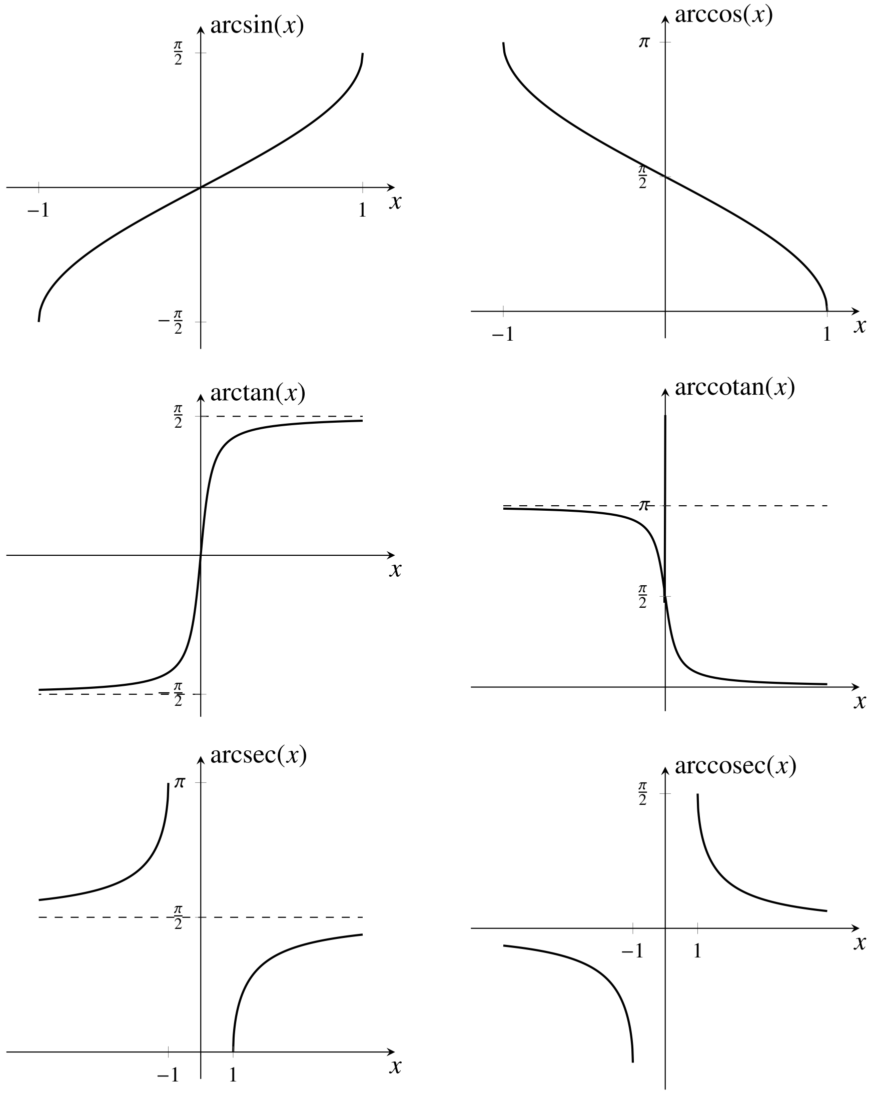
$$\begin{aligned} \arccos(\cos(\theta)) &= \arccos\left(\frac{1}{x}\right) \\ \theta &= \arccos\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\operatorname{asec}(x) = \theta = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$$ □

4 Graphe des fonctions trigonométriques inverses

On peut faire le graphe des fonctions trigonométriques inverses en utilisant le fait que le graphe d'une fonction inverse est la réflexion par la droite $y = x$ du graphe de la fonction originale.



5 Limites des fonctions trigonométriques inverses

Hypothèse. Les fonctions trigonométriques inverses sont continues partout où elles sont définies.

Les deux limites suivantes sont souvent utilisés en pratique.

Proposition 3.

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

Exemple 7.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\arccos(x)} = \frac{1}{1+\arccos(0)} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Exemple 8.

$$\lim_{x\to 2^+} \arctan\left(\frac{1}{x-2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2^+-2}\right) = \arctan\left(\frac{1}{0^+}\right) = \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$$

6 Dérivées des fonctions trigonométriques inverses

Proposition 4. Dérivée des fonctions trigonométriques inverses.

(a) $\Big(\arcsin(x)\Big)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(b) $\Big(\arccos(x)\Big)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(c) $\Big(\arctan(x)\Big)' = \dfrac{1}{x^2+1}$

(d) $\Big(\mathrm{arcctg}(x)\Big)' = \dfrac{-1}{x^2+1}$

(e) $\Big(\mathrm{asec}(x)\Big)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

(f) $\Big(\mathrm{arccosec}(x)\Big)' = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

Démonstration.

Toutes ces preuves se font en utilisant la dérivation implicite et des identités trigonométriques et la proposition 1. On suppose que x est dans le domaine des fonctions impliquées.

On utilise aussi les identités de Pythagore suivantes :

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)=1 \qquad \sec^2(x)=\tan^2(x)+1 \qquad \csc^2(x)=\mathrm{cotan}^2(x)+1.$$

(a) Preuve de $\Big(\arcsin(x)\Big)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$:

$$\begin{aligned}
\sin\big(\arcsin(x)\big) &= x\\
\Big(\sin\big(\arcsin(x)\big)\Big)' &= (x)'\\
\cos\big(\arcsin(x)\big)\Big(\arcsin(x)\Big)' &= 1\\
\Big(\arcsin(x)\Big)' &= \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

(c) Preuve de $\Big(\arctan(x)\Big)' = \dfrac{1}{x^2+1}$:

$$\begin{aligned}
\tan\big(\arctan(x)\big) &= x\\
\Big(\tan\big(\arctan(x)\big)\Big)' &= (x)'\\
\sec^2\big(\arctan(x)\big)\Big(\mathrm{asec}(x)\Big)' &= 1\\
\Big(\arctan(x)\Big)' &= \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}\\
&= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))}\\
&= \frac{1}{1+x^2}
\end{aligned}$$

(e) Preuve de $\Big(\mathrm{asec}(x)\Big)' = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$: cet argument est différent des précédent. Plutôt que d'utiliser la dérivation implicite, on utilise le fait que $\operatorname{asec}(x) = \arccos\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$
\begin{aligned}
(\operatorname{asec}(x))' &= \left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\left(\frac{1}{x}\right)' \\
&= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\,\frac{-1}{x^2} \\
&= \frac{1}{x^2\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} \\
&= \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}\left(x^2-1\right)}} \\
&= \frac{1}{x^2\sqrt{\frac{1}{x^2}}\,\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{x^2\frac{1}{\sqrt{x^2}}\,\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{x^2\left|\frac{1}{x}\right|\,\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{\frac{x^2}{|x|}\,\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{\frac{|x|^2}{|x|}\,\sqrt{x^2-1}} \\
&= \frac{1}{|x|\,\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}
$$

Les autres preuves sont laissées en exercice. On utilise la dérivation implicite et les identités de Pythagore de manière similaire aux trois preuves données. □

Note. Dans les preuves qui précèdent, on utilise les identités liant les fonctions trigonométriques inverses avec leur fonction trigonométriques correspondantes :

$$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \tan(\arctan(x)) = x \quad \cdots$$

Si ont met au carré chaque membre de ces identités, on obtient :

$$\sin^2(\arcsin(x)) = (\sin(\arcsin(x)))^2 = x^2 \quad \tan^2(\arctan(x)) = x^2 \quad \cdots$$

Exemple 9.

$$
\begin{aligned}
\left(\arcsin(2x)\right)' &= \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2)}}\left(2x\right)' \\
&= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}
\end{aligned}
$$

Exemple 10.

$$\begin{aligned}\left(\arccos\left(x^3\right)\right)' &= \frac{-1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\left(x^3\right)' \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}3x^2 \\ &= -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\end{aligned}$$

Exemple 11.

$$\begin{aligned}\left(\arctan(\sin(x))\right)' &= \frac{1}{\sin^2(x)+1}\left(\sin(x)\right)' \\ &= \frac{1}{\sin^2(x)+1}\cos(x) \\ &= \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)+1}\end{aligned}$$

Exemple 12.

$$\left(\arctan(x)^{13}\right)' = 13\arctan(x)^{12}\frac{1}{x^2+1} = \frac{13\arctan(x)^{12}}{x^2+1}$$

Note : $\arctan(x)^{13} = \left(\arctan(x)\right)^{13}$ et non pas « $\arctan(x^{13})$. »

Exemple 13.

$$\left(\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{1}{\left|\frac{x}{2}\right|\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2-1}}\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{\left|\frac{x}{2}\right|\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{|x|\sqrt{\frac{x^2}{4}-1}}$$

Exemple 14.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{\arctan(x)}\right)' &= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x)}}\left(\arctan(x)\right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\arctan(x)}}\frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

7 Extrémum de fonctions comportant des fonctions trigonométriques inverses

Exemple 15. Trouvons les extrémums de $f(x) = \arctan\left(x^3-12x\right)$.

La dérivée de f est

$$f'(x) = \frac{1}{(x^3-12x)^2+1}\left(3x^2-12\right) = \frac{3\left(x^2-4\right)}{\left(x^3-12x\right)^2+1} = \frac{3(x-2)(x+2)}{\left(x^3-12x\right)^2+1}.$$

La dérivée s'annule quand $x=2$ ou $x=-2$. Le numérateur $\left(x^3-12x\right)^2+1$ étant toujours plus grand que 1, il ne s'annule jamais,

Les valeurs critiques sont donc 2 et -2.

On peut faire un tableau de signe de la dérivée

x		-2		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	MAX	↘	MIN	↗

On conclue donc que f a un maximum en $x = -2$ et un minimum en $x = 2$.

Note : on choisit ici de faire un tableau de signe plutôt que d'utiliser le test de la dérivée seconde, car le calcul et simplification de dérivée seconde serait plus complexe que la détermination des signes de la dérivée première !

8 Analyse de fonctions comportant des fonctions trigonométriques inverses

Exemple 16. Analyser la fonction $f(x) = \arcsin(x)$.

La dérivée première est

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La dérivée seconde est

$$f''(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

Valeurs critiques de f' : $f'(x)$ non défini pour $x \geq 1$ ou $x \leq -1$. $f'(x)$ n'est jamais nul (car la fonction racine carrée, si elle est définie, donne toujours un résultat positif.)

Comme il y a division par 0 possible dans la dérivée en $x = \pm 1$, on vérifie si la dérivée tend vers $\pm\infty$ pour déterminer s'il y a un tangente verticale.

$$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

Valeurs critiques de f'' :

$f''(x) = 0$ si $x = 0$. $f''(x)$ est non-défini pour $x \geq 1$ ou $x \leq -1$.

Tableau de variation :

x	-1		0		1
$f'(x)$	∞	+	+	+	∞
$f''(x)$	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$
$f(x)$	TV	↗	INF	↗	TV

Graphe de la fonction $f(x) = \arcsin(x)$.