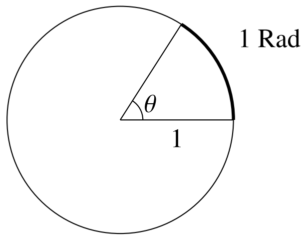
Calcul différentiel — Étude des fonctions trigonométriques

1 Rappels sur les fonctions trigonométriques

1.1 Mesures d'angles

Le **radian** (Rad) est une mesure d'angle où un angle est mesuré en longueur d'arc sur la circonférence de cercle de rayon 1.



Comme la circonférence d'un cercle de rayon 1 correspond à un arc d'un tour complet, un angle θ de 2π Rad correspond à un angle de 360 degrés ou d'un tour.

$$\frac{\theta \text{ Tour}}{1 \text{ Tour}} = \frac{\theta \text{ Rad}}{2\pi \text{ Rad}} = \frac{\theta \text{ Deg}}{360 \text{ Deg}}$$

Ces proportions servent à convertir la mesure d'un angle d'une unité à une autre.

1.1.1 Pourquoi le radian ?

Le radian est l'unité de mesure d'angle la plus naturelle dans un contexte scientifique et en calcul différentiel car les formules de dérivations des fonctions trigonométriques s'expriment plus simplement en radian, comme on peut le constater dans le tableau suivant.

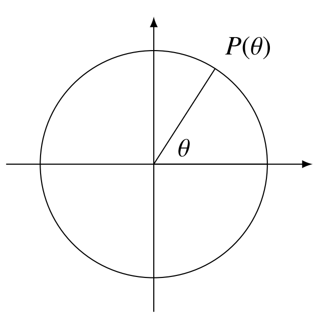
angle en…	tours	radians	degrés
$\big(\sin(x)\big)' =$	$\frac{1}{2\pi}\cos(x)$	$\cos(x)$	$\frac{180}{\pi}\cos(x)$

Il existe d'autres unités de mesure d'angle plus spécialisés, comme le grad (gradiant). Cette mesure est plus compatible avec le système décimal car un angle droit = 100 grad (et donc un tour est 400 grad). Le grad est utilisé dans certaines parties du monde pour l'arpentage et en géologie. Les géomètres grecs utilisaient l'angle droit comme unité de mesure. Dans ce cas, un tour est 4 angle droit, un angle de 45 degré est $\frac{1}{2}$ angle droit.

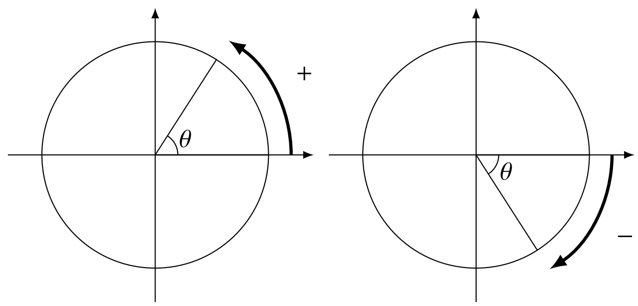
À moins de mention contraire, le radian sera utilisé partout dans ce texte.

1.2 Cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique permet de représenter les angles de manière standardisée et d'établir des liens entre différentes longueurs déterminée par un angle donné. Le **cercle trigonométrique** est le cercle de rayon 1 centrée à l'origine. Chaque angle θ correspond à un unique point $P(\theta)$ sur le cercle trigonométrique.



Par convention, on mesure les angles dans le cercle trigonométrique à partir d'un angle 0 situé sur l'axe des x positifs. Les angles positifs correspondent aux angles mesurés dans le sens anti-horaire, les angles négatifs correspondent aux angles mesurés dans le sens horaire.



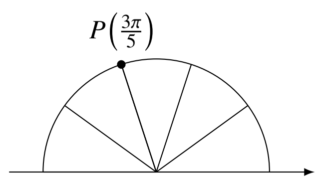
Enfin, bien que ces angles n'aient pas de sens géométrique, on peut considérer des angles de plus d'un tour.

Note. Il est généralement plus facile de repérer un angle dans le cercle trigonométrique sans faire la conversion à l'aide des proportions données dans la section 1.1. Il est plus simple de penser en « demi-tours » plutôt qu'en tours. Cela est plus facile que de convertir en degrés.

Par exemple, pour situer rapidement un angle de $\frac{3\pi}{5}$ Rad, on le considère comme un multiple de $\frac{\pi}{5}$:

$$\frac{3\pi}{5} = 3\frac{\pi}{5}.$$

Comme il est facile de diviser le demi-tour π en 5 angles de $\frac{\pi}{5}$, il est simple de situer l'angle de $\frac{3\pi}{5}$.



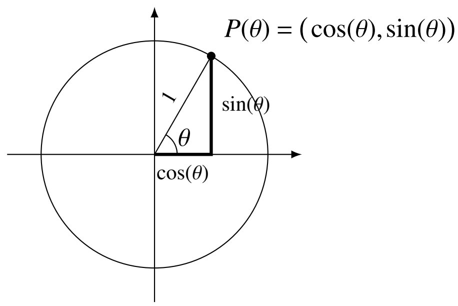
Il est aussi plus facile d'additionner des angles directement si on a cette division du cercle en tête : il est plus facile d'additionner mentalement $\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{5}$ (somme qui est évidemment $\frac{4\pi}{5}$, que d'additionner mentalement les mêmes angles en degrés : $108 + 36 = 144$.

Résumé

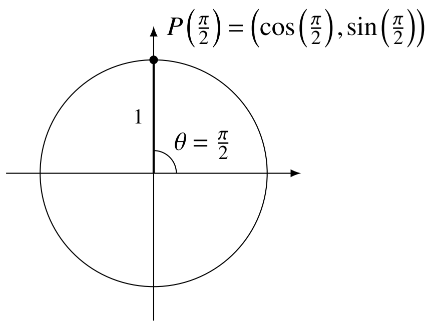
1.3 Les fonctions trigonométriques

Afin de pouvoir définir les fonctions trigonométrique pour tout angle possible $\theta \in \mathbb{R}$, on doit exprimer la définition à l'aide du *cercle trigonométrique*.

Définition. Les fonctions $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ sont définies comme les coordonnées en x et en y du point situé sur la circonférence d'un cercle de rayon 1 à l'angle θ.



Exemple 1. On peut évaluer $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ en situant le point $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$ dans le cercle trigonométrique.

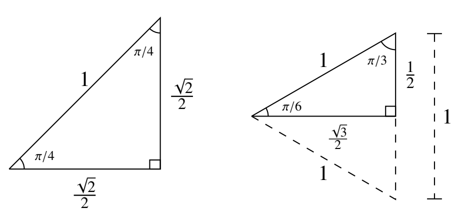


Comme les coordonnée de $P\left(\frac{\pi}{2}\right)$ sont (0,1), on a que

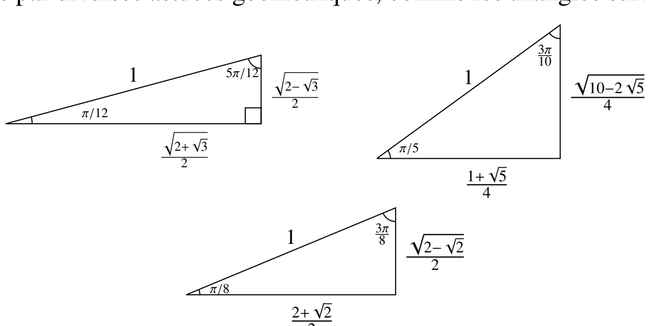
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

1.4 Triangles comportant des angles usuels

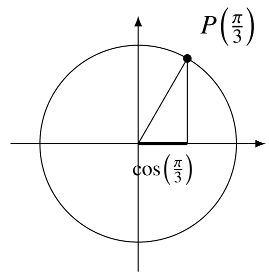
Pour le calcul des valeurs de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$, on utilise les grandeurs des côtés de certains triangles remarquables, pour lesquels il est possible de déterminer les longueurs des côtés géométriquement, à l'aide de la relation de Pythagore, de la loi des cosinus ou d'autres astuces géométriques. Les triangles les plus couramment utilisés sont les deux triangles suivants dont les dimensions sont supposées connues et peuvent être déterminées à l'aide de la relation de Pythagore.



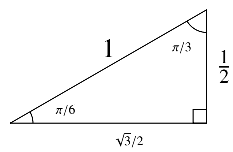
Il y a cependant plusieurs autres triangles remarquables pour lesquels ont peut déterminer les dimensions par diverses astuces géométriques, comme les triangles suivants.



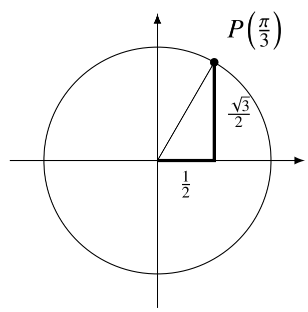
Exemple 2. Déterminons $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ à l'aide du cercle trigonométrique. On commence par situer le point $P\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et son cosinus.



Le triangle impliqué a comme angle à l'origine $\pi/3$ rad. Le triangle usuel comportant cet angle est le suivant.



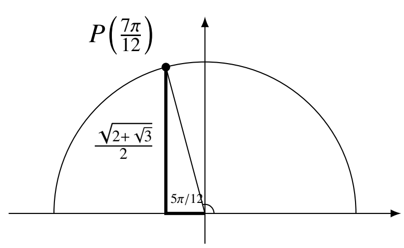
En replaçant les mesures de ce triangles dans la figure initiale, on a que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$



Exemple 3. En utilisant un des triangles remarquables donnés précédemment, on peut déterminer que :

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}.$$

On trouve cette valeur en identifiant les angles du triangle servant à défini sinus et cosinus dans le cercle trigonométrique pour le point $P\left(\frac{7p\pi}{12}\right)$:



Résumé

1.5 Identités trigonométriques

En utilisant le théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique, on obtient l'importante identité trigonométrique suivante :

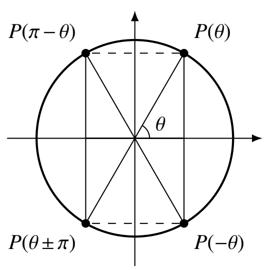
Proposition 1.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Note. On utilise ici une convention de notation très répandue : pour simplifier un peu l'écriture, on écrit $\sin^2(x)$ au lieu de $\big(\sin(x)\big)^2$ et $\cos^2(x)$ au lieu de $\big(\cos(x)\big)^2$. On utilisera une convention similaire pour toute les autres fonctions trigonométriques.

On peut se servir du cercle trigonométrique pour démontrer plusieurs identités trigonométriques importantes.

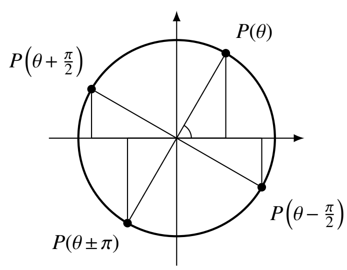
Proposition 2. Les fonctions sinus et cosinus sont liées entre elles par les identités suivantes.



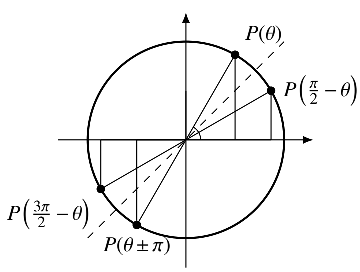
$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$
$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$$
$$\sin(\pi-\theta) = \sin(\theta)$$

$$\cos(\theta\pm\pi) = -\cos(\theta)$$
$$\sin(\theta\pm\pi) = -\sin(\theta)$$



$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$$
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$$
$$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta)$$
$$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\theta)$$

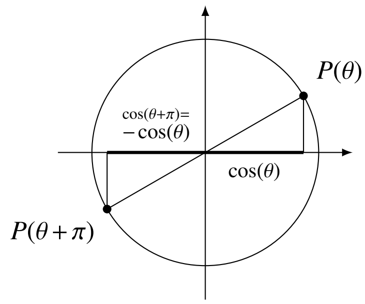


$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin(\theta)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = -\sin(\theta)$$
$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right) = -\cos(\theta)$$

Démonstration. La preuve de ces différentes identités à l'aide du cercle trigonométrique est laissée en exercice. Les cercles à gauche de chacune des identités contient les éléments géométriques permettant de compléter chacune des démonstrations. □

Exemple 4. Démontrons que $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$ à l'aide du cercle trigonométrique. Il suffit de représenter les angles impliqués (ici θ et $-\theta$) et de représenter les longueurs impliquées dans l'identité. L'égalité entre ces longueurs peut ensuite être déduite géométriquement.



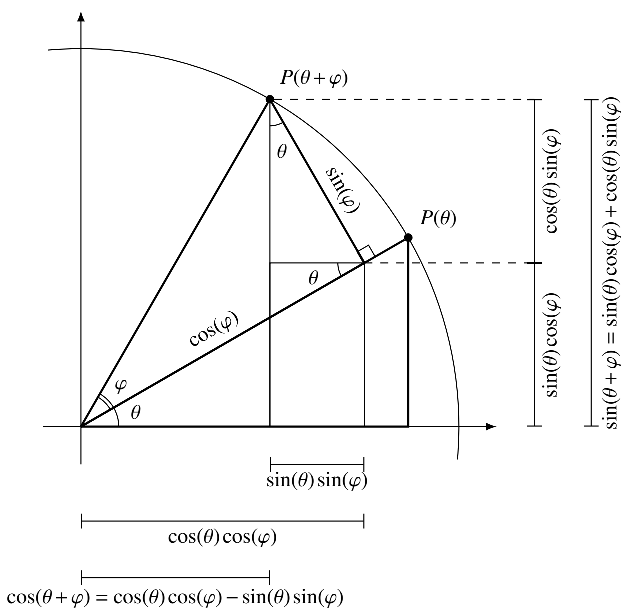
Les deux identités suivantes pour la sommes de deux angles sont très importantes car on en déduit plusieurs autre identités utiles.

Proposition 3.

$$\sin(\theta+\varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi)+\cos(\theta)\sin(\varphi)$$

$$\cos(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi)-\sin(\theta)\sin(\varphi)$$

Démonstration. La démonstration de ces deux identité est géométrique ; elles sont déduites des relations contenues dans le diagramme suivant.



□

Résumé

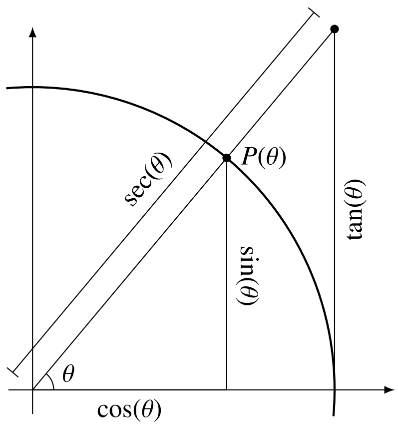
1.6 Autres fonctions trigonométriques et cercle trigonométrique étendu

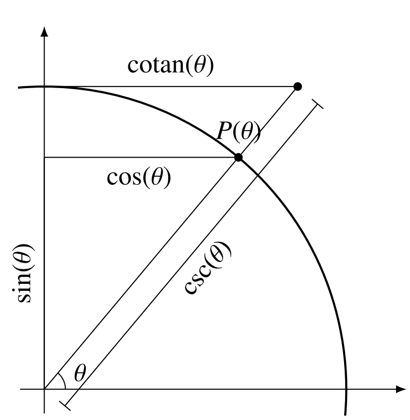
Définition. Les fonctions trigonométriques tangente, sécante, cosécante et cotangante sont définie à partir des fonctions sinus et cosinus de la manière suivante.

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \qquad \mathrm{cotan}(\theta) = \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \frac{1}{\tan(\theta)}$$

$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)} \qquad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Ces différentes fonctions trigonométriques correspondent aux mesures suivantes.





1.7 Évaluation des autres fonctions trigonométriques

Comme toutes les trigonométriques secante, cosecante, tangente et cotangente peuvent être exprimées en fonction de sinus et cosinus, on peut déterminer leur valeurs pour différents angles à partir des valeurs de sinus et cosinus.

Exemple 5.

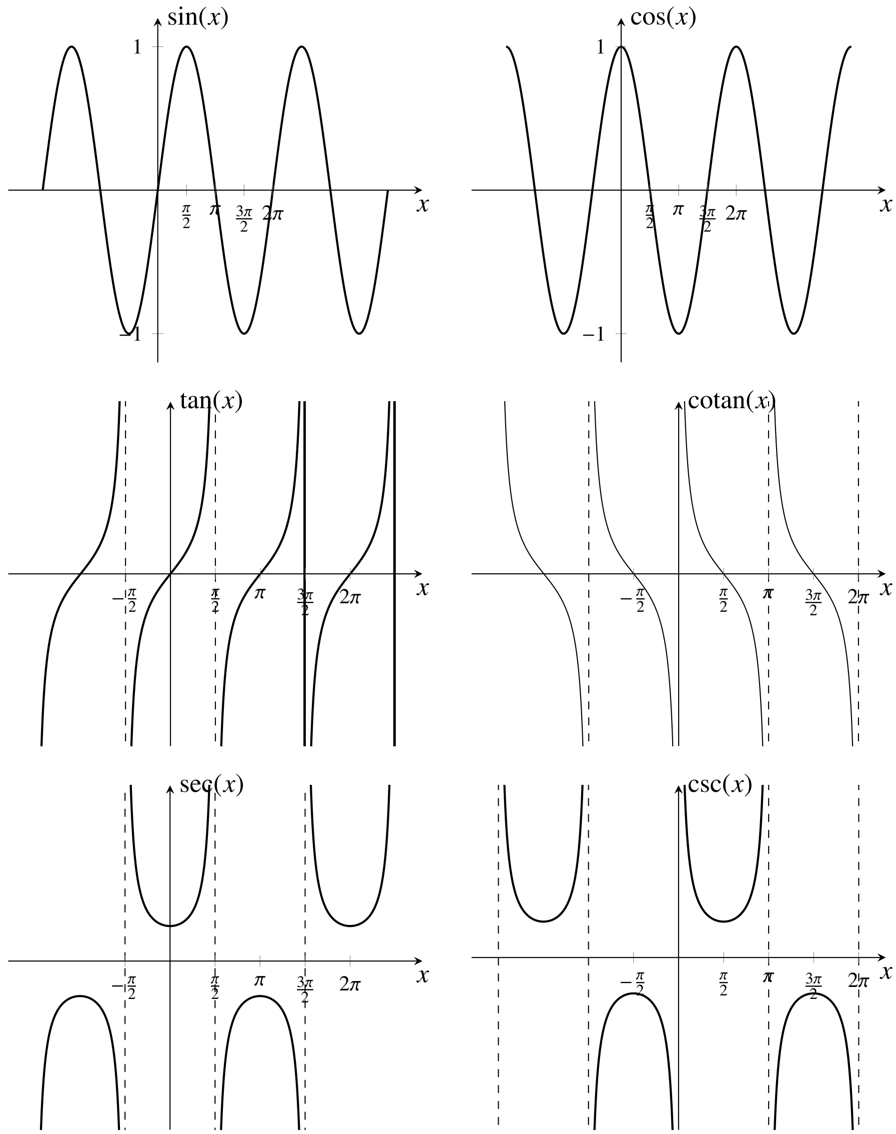
$$\begin{aligned}\sec\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}\\ &= \frac{1}{1/2}\\ &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\csc\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}/2}\\ &= \frac{2}{\sqrt{2}}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}\\ &= \frac{1/2}{\sqrt{3}/2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Résumé

2 Graphe des fonctions trigonométriques



2.1 Propriétés des fonctions trigonométriques

Comme un angle θ correspond au même point du cercle trigonométrique si on y ajoute un multiple entier de 2π, les valeurs fonctions trigonométriques sont les mêmes si on ajoute un multiple de entier de 2π.

Proposition 4. Toutes les fonctions trigonométriques sont périodiques de période 2π, c'est à dire que $f(x+2\pi) = f(x)$ pour chacune :

$$\sin(\theta+2\pi) = \sin(\theta), \quad \cos(\theta+2\pi) = \cos(\theta), \quad \text{etc.}$$

Cela pour conséquence que les fonctions trigonométriques ont une infinité de zéros. Par exemple, comme $\sin(0) = 0$, on doit avoir que $\sin(2\pi k) = \sin(0) = 0$ pour tout nombre entier k.

Enfin, les inégalités suivantes sont très utiles pour analyser des fonctions comportant des fonctions trigonométriques dans leurs définitions.

Proposition 5.

$$-1 \leq \sin(\theta) \leq 1 \qquad -1 \leq \cos(\theta) \leq 1.$$

Ces inégalités sont vraies par construction géométrique de sinus et cosinus. En effet, les côtés sinus et cosinus sont deux longueurs qui sont toujours plus petite que le rayon du cercle trigonométrique, qui est de rayon 1.

3 Limites des fonctions trigonométriques

Comme les fonctions trigonométriques sont définies par des constructions géométriques, il est raisonnable de faire l'hypothèse suivante.

Hypothèse. Les fonctions trigonométriques sont continues partout où elles sont définies.

Cela permet d'évaluer des limites de fonctions trigonométriques par substitution.

Exemple 6.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \sin(x) \stackrel{\text{cont}}{=} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}} \tan(x) \stackrel{\text{cont}}{=} \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = -1$$

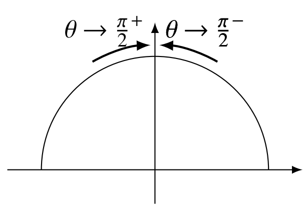
Les limites de fonction trigonométriques quand $x \to \pm\infty$ n'existent pas. À cause de la périodicité des fonctions trigonométriques, leurs valeurs en y ne s'approchent jamais d'une valeur limite.

Proposition 6.

$$\lim_{\theta\to\pm\infty} \sin(\theta) \nexists \qquad \lim_{\theta\to\pm\infty} \cos(\theta) \nexists$$

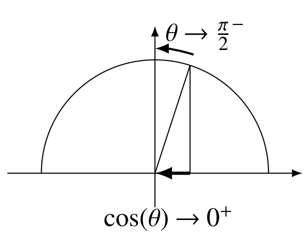
et de même pour toutes les autres fonctions trigonométriques.

Enfin, pour déterminer le comportement des limites à gauche ou à droite impliquant les fonctions trigonométriques, on peut utiliser le cercle trigonométrique. Il faut garder en tête le sens de parcours des angles dans le cercle trigonométrique. Par exemple, voici de quelle manière un angle s'approche de $\frac{\pi}{2}$ par la gauche $\left(\frac{\pi}{2}^-\right)$ et par la droite $\left(\frac{\pi}{2}^+\right)$.



Exemple 7.

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sec(x) &= \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{1}{\cos(x)} \\ &= \frac{1}{\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^-\right)} \qquad\qquad \left(\frac{1}{0^+} \text{ ou } \frac{1}{0^-}?\right) \end{aligned}$$

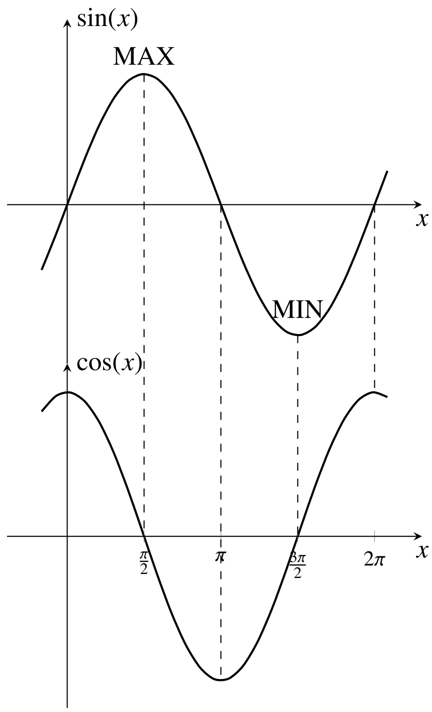


4 Dérivée des fonctions trigonométriques

L'objectif de cette section est d'établir que la dérivée de la fonction sinus est donnée par

$$(\sin(x))' = \cos(x).$$

On peut voir que cette relation est plausible en comparant les graphes des deux fonctions. Le tableau de signe montre que la fonction cosinus permet d'analyse la croissance de la fonction sinus et semble jouer le rôle de sa dérivée.



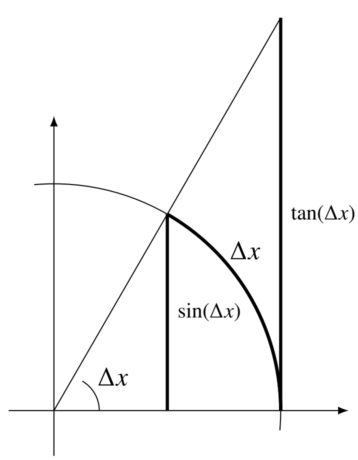
x	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$\cos(x)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$\sin(x)$	↗	MAX	↘	↘	↘	MIN	↗	↗	↗

Lemme.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1.$$

Démonstration. Par définition des fonctions trigonométrique et par les relations géométriques entre les longueurs auxquelles elles correspondent, on a que

$$\sin(\Delta x) \leq \Delta x \leq \tan(\Delta x).$$



En divisant par $\sin(\Delta x)$ on obtient :

$$\frac{\sin(\Delta x)}{\sin(\Delta x)} \leq \frac{\Delta x}{\sin(\Delta x)} \leq \frac{\tan(\Delta x)}{\sin(\Delta x)},$$

Ce qui donne, en simplifiant,

$$1 \leq \frac{\Delta x}{\sin(\Delta x)} \leq \frac{1}{\cos(\Delta x)}.$$

Si on inverse chaque membre de ces inégalités, on trouve que

$$1 \geq \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \geq \cos(\Delta x).$$

En prenant la limite quand $\Delta x \to 0$ des membres de droite et de gauche de la chaine d'inégalité :

$$\lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1 \qquad \lim_{\Delta x \to 0} \cos(\Delta x) = \frac{1}{\cos(0)} = 1$$

donc, par le théorème des gendarmes (**??**), le membre central doit avoir la même limite :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} = 1 \qquad \square$$

Note. Ce résultat justifie l'approximation $\sin(x) \approx x$ quand x est petit. Cette approximation est souvent utilisé en physique, par exemple pour obtenir l'importante équation décrivant le mouvement et la propagation des ondes.

Lemme.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}\right)\left(\frac{\cos(\Delta x) + 1}{\cos(\Delta x) + 1}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\cos^2(\Delta x) - 1}{\Delta x}\right)\left(\frac{1}{\cos(\Delta x) + 1}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{-\sin^2(\Delta x)}{\Delta x}\right)\left(\frac{1}{\cos(\Delta x) + 1}\right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)\left(\frac{-\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x) + 1}\right) \\
&= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\right)\left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin(\Delta x)}{\cos(\Delta x) + 1}\right) \\
&= (1)\left(\frac{0}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \qquad \square$$

Théorème. La dérivée de la fonction sinus est

$$\Big(\sin(x)\Big)' = \cos(x).$$

Preuve avec les différentilles. Soit $y = \sin(x)$. On calcule dy :

$$\begin{aligned}
dy &= \sin(x + dx) - \sin(x) \\
&= (\sin(x)\cos(dx) + \sin(dx)\cos(x)) - \sin(x) \\
&= \sin(dx)\cos(x) + \sin(x)\cos(dx) - \sin(x) \\
&= \sin(dx)\cos(x) + (\sin(x)\cos(dx) - \sin(x)) \\
&= \sin(dx)\cos(x) + \sin(x)(\cos(dx) - 1) \\
&\approx (dx)\cos(x) + \sin(x)(0) \\
&= \cos(x)\,dx.
\end{aligned}$$

En isolant, on trouve enfin que

$$\frac{dy}{dx} = \cos(x) \qquad \square$$

Preuve avec la définition en terme de limites.

$$\begin{aligned}
(\sin(x))' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\sin(x)\cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cos(x)) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x) + \sin(x)\cos(\Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x) + (\sin(x)\cos(\Delta x) - \sin(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)\cos(x)}{\Delta x} + \frac{\sin(x)\cos(\Delta x) - \sin(x))}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\cos(x) + \sin(x)\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \\
&= \left(\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}\cos(x)\right) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \sin(x)\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}\right) \\
&= (1)\cos(x) + \sin(x)(0) \\
&= \cos(x) \qquad \square
\end{aligned}$$

Exemple 8. En combinant la formule de dérivation de $\sin(x)$ et la règle de chaine :

$$\left(\sin(5x)\right)' = \cos(5x)(5) = 5\cos(5x)$$

$$\left(\sin\left(x^2\right)\right)' = \cos\left(x^2\right)\left(x^2\right)' = 2x\cos\left(x^2\right).$$

En combinant la formule de dérivation de $\sin(x)$ et la règle de Leibniz :

$$\left(x\sin(x)\right)' = \sin(x) + x\cos(x)$$

En combinant la formule de dérivation de $\sin(x)$ et la règle du quotient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)' &= \frac{\left(\sin(x)\right)'(x) - \sin(x)(x)'}{x^2} \\
&= \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.
\end{aligned}$$

Résumé

5 Dérivés des autres fonctions trigonométriques

Les dérivées des autres fonctions trigonométriques sont trouvées en utilisant leur définition, des identités algébriques et les formules de dérivation connues.

Proposition 7 (Dérivée des fonctions trigonométriques)**.**

(a) $\big(\cos(x)\big)' = -\sin(x)$

(b) $\big(\tan(x)\big)' = \sec^2(x)$

(c) $\big(\cot(x)\big)' = -\csc^2(x)$

(d) $\big(\sec(x)\big)' = \sec(x)\tan(x)$

(e) $\big(\csc(x)\big)' = -\csc(x)\cot(x)$

Démonstration. Preuve de (a). On utilise les identités $\cos(\theta) = \sin(\theta + \pi/2)$ et $-\sin(\theta) = \cos(\theta+\pi/2)$.

$$\begin{aligned}
\big(\cos(x)\big)' &= \big(\sin(x+\pi/2)\big)' \\
&= \cos(x+\pi/2)(x+\pi/2)' \\
&= \cos(x+\pi/2) \\
&= \cos(x+\pi/2) \\
&= -\sin(x)
\end{aligned}$$

Preuve de (b). On utilise la définition de $\tan(x)$ en terme de $\sin(x)$ et $\cos(x)$, ainsi que l'identité $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$.

$$\begin{aligned}
\big(\tan(x)\big)' &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\
&= \frac{\big(\sin(x)\big)'\cos(x) - \sin(x)\big(\cos(x)\big)'}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \\
&= \sec^2(x)
\end{aligned}$$

Les preuves des formules de dérivations de $\sec(x)$, $\csc(x)$ et $\text{cotan}(x)$ sont similaires et sont laissées en exercice. □

Exemple 9.

$$\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \sec^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\left(\text{cotan}\left(x^3\right)\right)' = -\sec^2\left(x^3\right)\left(x^3\right)' = 3x^2\sec^2\left(x^3\right)$$

$$\left(\sec\left(x^2\right)\right)' = \sec\left(x^2\right)\tan\left(x^2\right)\left(x^2\right)' = 2x\sec\left(x^2\right)\tan\left(x^2\right)$$

Remarque. Dans ce dernier exemple, la fonction « à l'intérieur » de sec est substituée à deux endroits, dans tan et dans sec. C'est ce dit la règle de chaine. En effet, la règle de chaine pour deux fonctions générique f et g est

$$\left(f(g(x))\right)' = f'(g(x))\,g'(x)$$

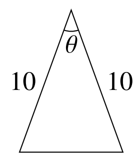
Dans le cas de $\sec\left(x^2\right)$, $f(x) = \sec(x)$ et $g(x) = x^2$. Comme $f'(x) = \sec(x)\tan(x)$, on a que

$$f'\left(g(x)\right) = f'\left(x^2\right) = \sec\left(x^2\right)\tan\left(x^2\right)$$

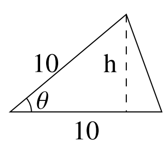
Les règle de dérivation des fonctions sécante et cosécante sont les seules que nous avons vu pour lesquelles l'argument de la fonction x apparait à plusieurs endroits dans la formule de dérivation. Il faut donc bien appliquer la règle de chaine.

6 Applications de la dérivée des fonctions trigonométriques

Exemple 10. Déterminons la valeur de l'angle θ qui maximise l'aire du rectangle suivant :



L'aire du rectangle est plus facile à déterminer en considérant un des deux côtés donnés comme sa base.



La hauteur de ce rectangle étant $h = 10\sin(\theta)$, sont aire est

$$A = \frac{10 \cdot 10\sin(\theta)}{2} = 50\sin(\theta)$$

On cherche donc le maximum de la fonction $A(\theta) = 50\sin(\theta)$.

La dérive de la fonction est $A'(\theta) = 50\cos(\theta)$. Les valeurs critiques de la dérivée sont les solutions de l'équation $A'(\theta) = 0$ dans l'intervalle $[0,\pi]$

$$\begin{aligned} 50\cos(\theta) &= 0 \\ \cos(\theta) &= 0 \\ \theta &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

On applique le test de la dérivée seconde pour déterminer s'il y a un minimum ou un maximum en $\theta = \frac{\pi}{2}$. La dérivée seconde est $A''(\theta) = -50\sin(\theta)$ et $A''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -50\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -50 < 0$.

L'aire est donc maximale pour l'angle droit $\theta = \frac{\pi}{2}$.