Calcul différentiel — Optimisation

1 Optimisation

Un problème d'optimisation est un problème où on veut déterminer un résultat « optimal », c'est à dire maximum ou minimum. Dans un problème d'optimisation, on cherche à déterminer quand une certaine quantité (distance, temps, hauteur, longueur, etc) qui en relation avec d'autres quantité attend un maximum ou un minimum selon les valeurs des autres quantités.

Le plan général est d'utiliser les concepts développés pour analyser des fonctions dans le chapitre précédent. Il faut dont exprimer la quantité à optimiser en fonction d'une autre quantités. Dans les cas que nous étudierons dans ce cours, cette fonction sera toujours une fonction d'une seule variable. Une fois cette fonction déterminée, on utilise le théorème de Fermat généralisé pour trouve ses minimum et maximums. On complète en déterminant le type d'extrémum à l'aide du test de la dérivée seconde ou en utilisant un tableau de variation.

1.1 Étapes à suivre pour résoudre un problème d'optimisation

1. Illustrer la situation si possible.
2. Identifier ce qui varie dans le problème, associer des variables à grandeurs.
3. Identifier la quantité à optimiser.
4. Exprimer les relations entre les différentes quantités du problème.
5. Exprimer la quantité à optimiser en fonction des grandeurs variables.
6. Utiliser la ou les contraintes pour réduire le nombre de variable exprimant la quantité à optimiser à une seule variable.
7. Trouver les valeurs critiques de la fonction trouvée.
8. Déterminer si la fonction a un maximum ou un minimum pour les différentes valeurs critiques trouvées.

2 Exemples illustrant différents types de problème d'optimisation

Exemple 1. Problème : *Trouver deux nombres x et y tels que $x+2y=10$ et leur produit est maximum.*

Solution : si x et y sont les deux nombres, on veut optimiser leur produit xy.

Comme x et y doivent satisfaire la contrainte $x+2y=10$, on doit avoir que

$$y = \frac{10-x}{2}.$$

Avec cette contrainte, on peut exprimer le produit xy uniquement en fonction de x :

$$P(x) = xy = x\frac{10-x}{2} = \frac{10x-x^2}{2}.$$

Il faut donc optimiser la fonction $P(x)$.

On dérive $P(x)$ pour trouver les valeurs critiques :

$$P'(x) = \frac{10-2x}{2} = 5-x.$$

La seule valeur critique est donc :

$$P'(x) = 0 \iff x = 5.$$

On utilise le test de la dérivée seconde pour déterminer si on a un minimum ou un maximum en $x=5$. La dérivée seconde est $P''(x) = -1$, donc

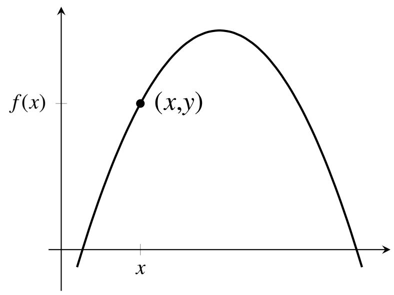
$$P''(5) = -1 < 0.$$

Le produit est donc maximum en $x=5$.

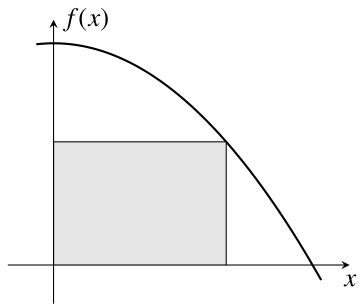
Les deux nombres cherchés sont $x=5$ et

$$y = \frac{10-5}{2} = \frac{5}{2}.$$

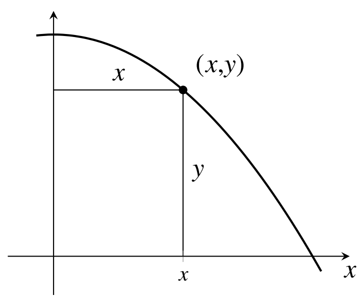
Note. Si un point est sur le graphe d'une fonction f, les coordonnées de ce point sont (x,y) avec $y = f(x)$.



Exemple 2. Problème : *Déterminer l'aire du plus grand rectangle pouvant être inscrit sous le graphe de la fonction $f(x) = 9 - x^2$, comme dans la figure ci-dessous.*



Solution : nommons x et y les dimensions du rectangle :



L'aire du rectangle à optimiser est $A = xy$. On considère que $x \geq 0$ et $y \geq 0$ pour des raisons géométriques.

Comme le point (x,y) est sur le graphe de la fonction f, nous avons la contrainte que la coordonnée y est $f(x) = 9 - x^2$. En utilisant cette contrainte, on peut exprimer l'aire à optimiser uniquement en fonction de x :

$$A(x) = xy = x\left(9 - x^2\right) = 9x - x^3.$$

On doit donc optimiser la fonction $A(x)$. On cherche ses valeurs critiques :

$$A'(x) = 9 - 3x^2$$

$$A'(x) = 0 \iff 9 - 3x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{\frac{9}{3}} = \pm\sqrt{3}.$$

Comme on veut que $x \geq 0$, on considère uniquement la valeur critique $x = \sqrt{3}$.

On détermine si on a un maximum ou un minimum en $x = \sqrt{3}$ à l'aide du test de la dérivée seconde.

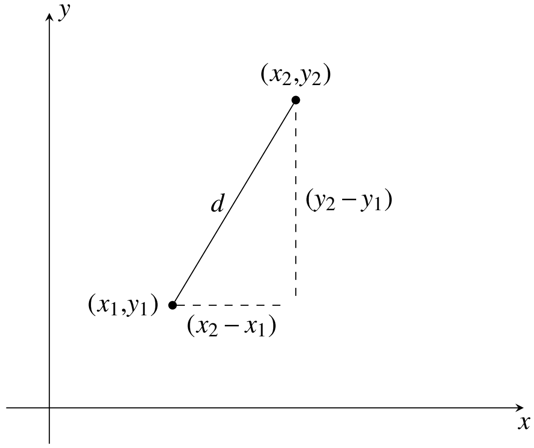
$$A''(x) = -6x;$$
$$A''\left(\sqrt{3}\right) = -6\sqrt{3} < 0.$$

Comme la dérivée seconde est négative, $A(x)$ atteint un maximum en $x = \sqrt{3}$. L'aire du plus grand rectangle est donc

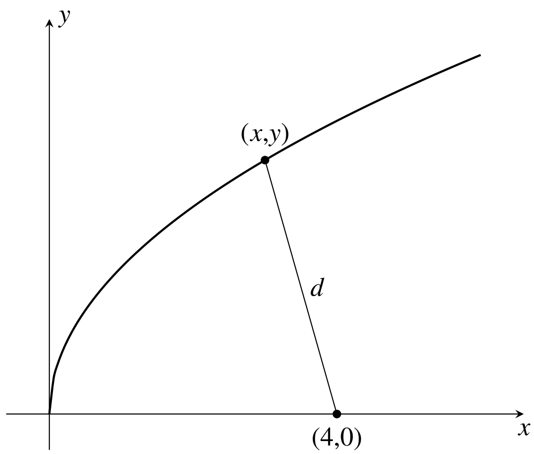
$$A\left(\sqrt{3}\right) = 9\sqrt{3} - \left(\sqrt{3}\right)^3 = \sqrt{3}\left(9 - \left(\sqrt{3}\right)^2\right) = 6\sqrt{3}.$$

Note. La distance entre deux points points du plan est déterminée par la relation de Pythagore :

$$d((x_1,y_2),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



Exemple 3. Problème : *déterminer le point de la courbe* $y = \sqrt{x}$ *qui est le plus près du point* (4,0).



Solution : soit (x,y) un point sur la courbe donnée. Comme x et y satisfont la contrainte $y = \sqrt{x}$ parce que le point (x,y) est sur le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x}$, la distance entre (x,y) et (4,0) est

$$d(x) = \sqrt{(4-x)^2+y^2} = \sqrt{(4-x)^2+x}.$$

On dérive cette fonction pour trouver ses valeurs critiques :

$$d'(x) = \frac{2(4-x)(-1)+1}{2\sqrt{(4-x)^2+x}} = \frac{2x-7}{2\sqrt{(4-x)^2+x}}.$$

On cherche les valeurs critiques : on a que $d'(x) = 0$ si et seulement si $2x-7 = 0$. La seule valeur critique est $x = 7/2$.

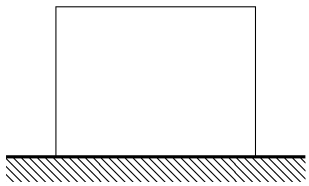
On fait un tableau de variation pour $d(x)$:

x		$\frac{7}{2}$	
$d'(x)$	-	0	+
$d(x)$	$\searrow$	MIN	

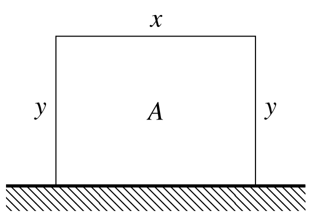
On a bien un minimum en $x = 7/2$. Le point cherché est donc

$$(x,y) = \left(\frac{7}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right).$$

Exemple 4. Question : *on a* 100 m *de clôture. Déterminer l'enclos de plus grande superficie que l'on peut faire le long d'un mur avec cette clôture.*



Solution : On utilise les 100 m de clôture comme dans la figure suivante.



On veut maximiser $A = xy$; pour des raisons géométriques, on veut que $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

La longueur totale de clôture est 100, on a donc la contrainte

$$x + 2y = 100.$$

Si le côté parallèle au mur est de longueur x, chacun des deux autres côtés doit être de longueur $y = 50 - 2x$. On peut donc exprimer l'aire à maximiser en fonction de x uniquement.

$$A(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2.$$

On cherche les valeurs critiques de $A(x)$. La dérivé de $A(x)$ est

$$A'(x) = \left(100x - 2x^2\right)' = 100 - 4x.$$

On détermine les valeurs critiques :

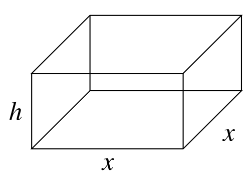
$$A'(x) = 0 \iff 100 - 4x = 0 \iff x = 25.$$

On détermine si on a un maximum ou un minimum en $x = 25$ à l'aide du test de la dérivée seconde. On a que $A''(x) = -4$, donc

$$A''(25) = -4 < 0.$$

Donc, par le test de la dérivée seconde, on a bien un maximum.

Exemple 5. Problème : *on cherche le volume maximum d'une boîte à base carrée de surface* $48\,\mathrm{m}^2$.



Solution : la surface d'une telle boite est $S = 2x^2 + 4hx$, où h est la hauteur de la boite et x le côté de la base. Comme la surface doit être de $48\,\mathrm{m}^2$, on a la contrainte suivante.

$$48 = 2x^2 + 4hx.$$

Le volume de la boîte est $V = hx^2$. Comme la contrainte permet de déterminer la hauteur en fonction du côté x, le volume peut être donnée en fonction du côté x uniquement.

En isolant h dans la contrainte, on obtient que

$$h = \frac{48 - 2x^2}{4x}.$$

Le volume est donc

$$V(x) = hx^2 = \frac{48 - 2x^2}{4x} x^2 = \frac{x\left(48 - 2x^2\right)}{4}.$$

On cherche donc à maximiser $V(x)$. La dérivée de $V(x)$ est

$$\begin{aligned} V'(x) &= \frac{1}{4}\Big((48 - 2x^2) + x(-4x)\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big((48 - 2x^2) - 4x^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\left(48 - 6x^2\right) \\ &= \frac{3}{2}\left(8 - x^2\right) \end{aligned}$$

On trouve donc que

$$V'(x) = 0 \iff 8 - x^2 = 0 \iff x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}.$$

Comme x est la longueur du côté de la boite, on ne considère que la solution positive $x = 2\sqrt{2}$.

Pour déterminer si on a un minimum ou un maximum en $x = 2\sqrt{2}$, on calcule la dérivée seconde :

$$V''(x) = \frac{3}{2}(-2x) = -3x.$$

En $x = 2\sqrt{2}$, on a que

$$V''\left(2\sqrt{2}\right) = -3(2)\sqrt{2} < 0.$$

Par le test de la dérivée seconde, on a donc un maximum en $x = 2\sqrt{2}$. Le volume maximum est donc

$$V\left(2\sqrt{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}\left(48 - 2\left(2\sqrt{2}\right)^2\right)}{4} = \frac{\sqrt{2}(48 - 2(8))}{2} = 16\sqrt{2}.$$

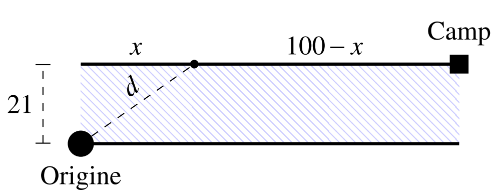
Note. La vitesse est

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t}.$$

Dans certains problèmes d'optimisation, il est utile d'isoler le temps de parcours en fonction de la vitesse et de la distance.

$$\Delta t = \frac{\Delta d}{v}.$$

Exemple 6. Pour rejoindre un camp lors d'une expédition, on doit traverser une rivière de 21 m de large et ensuite marcher le long de la rivière jusqu'au camp. Le camp est sur l'autre rive à 100 m de distance le long de la rivière. Si on peut traverser la rivière à une vitesse de 1 m/s et que l'on marche sur le sentier le long de la rivière à une vitesse de 2 m/s quel est le trajet le plus rapide ?



Solution : comme on cherche le trajet le plus rapide, on cherche à minimiser le temps pour revenir au camp. La distance parcourue dans la rivière est

$$d_{\text{riv}} = \sqrt{x^2 + 21^2}.$$

Comme cette distance est parcourue à une vitesse de 1 m/s, elle est parcourue en un temps

$$T_{\text{riv}} = \frac{\sqrt{x^2 + 21^2}}{1} = \sqrt{x^2 + 21^2}.$$

La distance parcourue sur le sentier est

$$d_{\text{sen}} = 100 - x$$

Comme cette distance est parcourue à une vitesse de 2 m/s, elle est parcourue en un temps

$$T_{\text{sen}} = \frac{\sqrt{100 - x}}{2}.$$

Ainsi, le temps total du trajet à partir du point de départ jusqu'au camp est :

$$T(x) = T_{\text{riv}} + T_{\text{sen}} = \sqrt{x^2 + 21^2} + \frac{100 - x}{2}$$

On veut minimiser $T(x)$. On calcule la dérivée de $T(x)$:

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 21^2}} + \frac{-1}{2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 21^2}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On trouve les valeurs critiques de $T(X)$:

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 &\iff \frac{x}{\sqrt{x^2 + 21^2}} - \frac{1}{2} = 0 \\ &\iff \frac{x}{\sqrt{x^2 + 21^2}} = \frac{1}{2} \\ &\iff 2x = \sqrt{x^2 + 21^2} \\ &\iff (2x)^2 = \left(\sqrt{x^2 + 21^2}\right)^2 \\ &\iff 4x^2 = x^2 + 21^2 \\ &\iff 3x^2 = 21^2 \\ &\iff x^2 = \frac{21^2}{3} \\ &\iff x = \pm\frac{21}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Comme on veut $x \geq 0$, on ne conserver que la solution

$$x = \frac{21}{\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{21\sqrt{3}}{3} = 7\sqrt{3}$$

On applique le test de la dérivée seconde pour déterminer si on a un maximum ou un minimum.

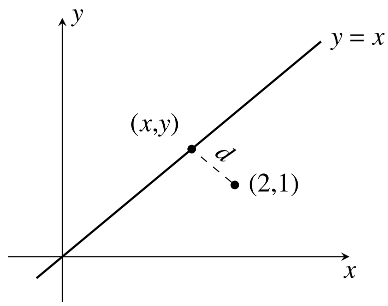
$$T''(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 21^2} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 21^2}}}{x^2 + 21^2} - \frac{1}{2}$$

On a que

$$\begin{aligned} T''\left(7\sqrt{3}\right) &= \frac{\sqrt{\left(7\sqrt{3}\right)^2 + 21^2} - \frac{\left(7\sqrt{3}\right)^2}{\sqrt{\left(7\sqrt{3}\right)^2 + 21^2}}}{\left(7\sqrt{3}\right)^2 + 21^2} - \frac{1}{2} \\ &\approx 0.031 > 0 \end{aligned}$$

Comme $T''\left(7\sqrt{3}\right) > 0$, le temps de parcours est minimum quand $x = 7\sqrt{3}$.

Exemple 7. Question : *trouver le point de la droite $x = y$ qui est le plus près du point* $(2,1)$.



Solution : soit (x,y) un point sur la droite donnée. Comme le point est sur la droite $y = x$, le point doit être de la forme (x,x). La distance entre (x,x) et $(2,1)$ est

$$d(x) = \sqrt{(2-x)^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (x-1)^2} = \sqrt{2x^2 - 6x + 5}$$

La dérivée de $d(x)$ est

$$d'(x) = \frac{4x-6}{2\sqrt{2x^2-6x+5}} = \frac{x-3}{\sqrt{2x^2-6x+5}}$$

On détermine les valeurs critiques.

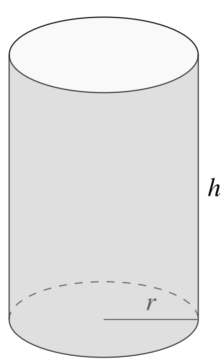
$$d'(x) = 0 \iff x = 3/2.$$

C'est bien un minimum (tableau de signes).

x		$\frac{3}{2}$	
$d'(x)$	-	0	+
$d(x)$	$\searrow$	MIN	$\nearrow$

Comme la distance minimum est atteinte quand $x = 3/2$, elle est donc atteinte au point $(x,x) = (3/2,3/2)$.

Exemple 8. Question : *On conçoit un contenant de forme cylindrique sans couvercle. On sait que la surface du contenant doit être de* $3\pi\,\mathrm{m}^2$. *Quel est le volume maximum qu'un tel contenant peut avoir ?*



Solution : On considère que r et h sont positifs. le volume du cylindre est

$$V = \pi r^2 h.$$

On utilise la contrainte donnée pour trouver une relation entre r et h. La surface latérale d'un cylindre de hauteur h et de rayon r est

$$S_{\text{lat}} = 2\pi r h$$

La surface du fond du content est

$$S_{\text{fond}} = \pi r^2.$$

La surface totale du contenant est donc

$$S = \pi r^2 + 2\pi r h.$$

Cette surface doit être $3\pi\,\mathrm{m}^2$, ce qui donne la contrainte suivante :

$$3 = \pi r^2 + 2\pi r h.$$

On isole h :

$$h = \frac{3 - \pi r^2}{2\pi r}.$$

En substituant cette expression pour h dans V, on obtient une expression donnant V en fonction de r :

$$V(r) = \pi r^2 h = \frac{r^2(3 - \pi r^2)}{2\pi r} = \frac{r(3 - \pi r^2)}{2\pi}$$

Comme on veut maximiser $V(r)$, on détermine ses valeurs critiques. La dérivée de $V(r)$ est

$$V'(r) = \frac{(3 - \pi r^2) + r(-2\pi r)}{2\pi} = \frac{3(1 - \pi r^2)}{2\pi}$$

On trouve les valeurs critiques :

$$V'(r) = 0 \iff 1 - \pi r^2 = 0 \iff r = \pm\frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

On considère uniquement la solution positive pour des raisons géométriques.

On vérifie que cette valeur critique corrspond bien à un maximum à l'aide de la dérivée seconde :

$$V''(r) = -\frac{6\pi r}{2\pi} = -3r$$

$$V''\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = -3\frac{1}{\sqrt{\pi}} < 0$$

Comme la dérivée seconde est négative, par le test de la dérivée seconde, on a bien un maximum en $x = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$.

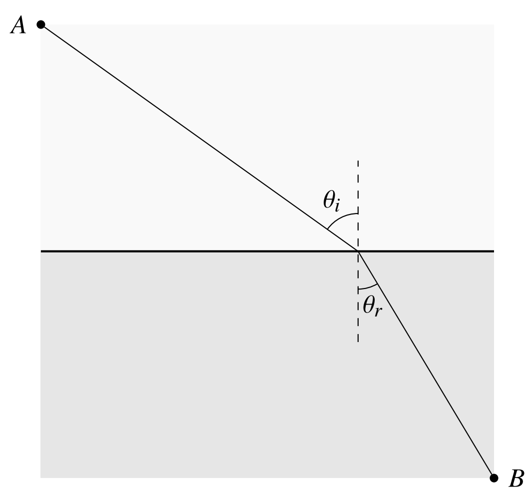
Le volume maximum est

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)\left(3 - \pi\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2\right)}{2\pi} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)(3-1)}{2\pi} = \frac{1}{\pi^2}.$$

Exemple 9. La loi de Snell-Descartes pour réfraction de la lumière relie l'angle d'incidence θ_i et l'angle de réfraction θ_r de la manière suivante :

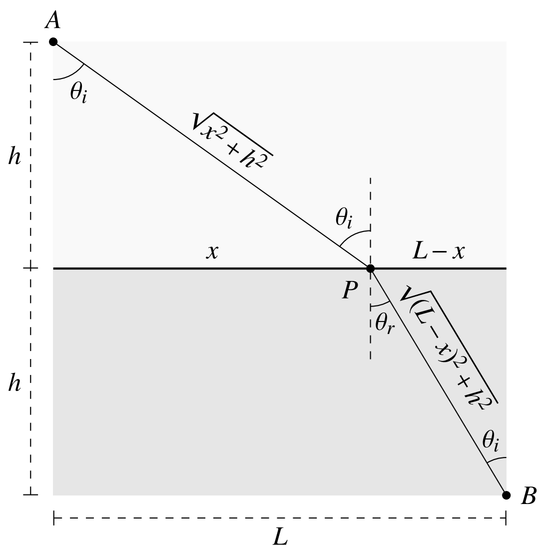
$$\frac{\sin(\theta_i)}{v_i} = \frac{\sin(\theta_r)}{v_r},$$

où la vitesse de la lumière dans le milieur d'incicence est v_i et celle dans le milieux de réfraction v_r.



Il est possible de déduire cette loi à partir d'un principe plus fondamental : le principe de moindre temps de Fermat. Ce principe est l'hypothèse que la lumière emprunte la trajectoire qui minimise le temps de parcours.

On démontre la loi de Snell-Descartes de la manière suivante. Appelons x la distance entre le point où le rayon lumineux change de milieux, L la distance entre A et B parallèle à la séparation entre les milieux et h la distance entre cette séparation et les points A et B, comme dans la figure suivante.



La distance parcoure par le rayon lumineux dans le milieu d'incidence est la distance AP, qui, par la relation de Pythagore, est

$$\sqrt{x^2+h^2}.$$

De même, la distance parcoure par le rayon lumineux dans le milieu de réfraction est la distance PB, qui, par la relation de Pythagore, est

$$\sqrt{(L-x)^2+h^2}$$

Comme la vitesse dans le milieux d'incidence est v_i et celle dans le milieux de réfraction est v_r, le temps de parcours dans ces mileux respectifs est

$$T_i = \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{v_i} \qquad T_r = \frac{\sqrt{(L-x)^2+h^2}}{v_r}.$$

Le temps total que prend le rayon lumineux pour passer de A à B en passant par P donné en fonction de x est donc

$$T(x) = T_i + T_r = \frac{\sqrt{x^2+h^2}}{v_i} + \frac{\sqrt{(L-x)^2+h^2}}{v_r}.$$

Pour respecter le principe de Fermat, $T(x)$ doit être minimum.

Pour déterminer la valeur de x où $T(x)$ est minimum, on cherche les valeurs critiques. La dérivée de $T(x)$ est

$$\begin{aligned} T'(x) &= \frac{2x}{2v_i\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{2(L-x)}{2v_r\sqrt{(L-x)^2+h^2}} \\ &= \frac{x}{v_i\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{L-x}{v_r\sqrt{(L-x)^2+h^2}} \end{aligned}$$

On sait que si $T(x)$ est minimum, alors $T'(x) = 0$. Si $T'(x) = 0$, on a que

$$\begin{aligned} T'(x) = 0 &\iff \frac{x}{v_i\sqrt{x^2+h^2}} - \frac{L-x}{v_r\sqrt{(L-x)^2+h^2}} = 0 \\ &\iff \frac{x}{v_i\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{L-x}{v_r\sqrt{(L-x)^2+h^2}} \end{aligned}$$

Comme par définition de sinus on a que $\sin(\theta_i) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+h^2}}$ et $\sin(\theta_r) = \dfrac{L-x}{\sqrt{(L-x0^2+h^2}}$, on peut réécrire la condition obtenue pour que $T'(x) = 0$ de la manière suivante :

$$\frac{x}{v_i\sqrt{x^2+h^2}} = \frac{L-x}{v_r\sqrt{(L-x)^2+h^2}} \iff \frac{\sin(\theta_i)}{v_i} = \frac{\sin(\theta_r)}{v_r}.$$

Ainsi le principe de Fermat implique la loi de Snell-Descartes.