

Réduction et algorithme de Gauss-Jordan

Exercices

Question 1

Représenter les systèmes d'équation linéaires suivants sous forme matricielle.

$$a) \begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -x+y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -\frac{2}{3} \\ \frac{5x}{6} - \frac{3y}{4} = 1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x+z=1 \\ x-y=2 \\ y-z=3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x=2 \\ x+y=1 \end{cases}$$

Question 2

Écrire le système d'équations linéaires correspondant aux matrices suivante en utilisant les variables x, y, z et u .

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & -5 & 1 & 3 & 3 \\ 9 & 7 & -5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Question 3

Donner la solution des systèmes d'équation linéaires représentés par les matrices suivantes. Utilisez les variables x, y, z et u , dans l'ordre.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Question 4

Identifier les matrices qui sont sous forme échelonnée ou échelonnée-réduite.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 5

Dire si les systèmes d'équations correspondant aux matrices suivantes ont une seule solution, aucune solution ou une infinité de solution.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$j) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$h) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 6

Les systèmes d'équations correspondant aux matrices suivantes ont une infinité de solutions. Donner toutes les solutions à l'aide de paramètres.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 7

Appliquer la suite de transformations indiquées pour obtenir la forme échelonnée du système d'équation et en donner la solution. Faire les mêmes opérations sur la matrice correspondante.

$$a) \begin{cases} 2x+3y=4 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

Opérations :

1. $L_1 \leftarrow L_1 \times \frac{1}{2}$
2. $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
3. $L_2 \leftarrow L_2 \times 2$

Opérations :

1. $L_1 \leftrightarrow L_2$
2. $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
3. $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
4. $L_2 \leftrightarrow L_3$
5. $L_2 \leftarrow L_2 \times (-1)$ et
6. $L_3 \leftarrow L_3 \times (-1)$
7. $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$

$$b) \begin{cases} 3x+2y+2z=2 \\ x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+3z=4 \end{cases}$$

Question 8

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants en utilisant les matrices et la réduction.

$$a) \begin{cases} -2x+3y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x-2y=3 \\ 2x-5y=3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x+2y=2 \\ 3x+4y=3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x-2y=1 \\ -2x+4y=-1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+2y=1 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+2y+z=1 \\ -2x+2y+z=1 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \\ -2x+2y+z=0 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-2 \\ 3x-y+3z=-3 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} y-2z=1 \\ 2x+2y+2z=1 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$$

Solutions

Question 1

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x+2y+z-u=1 \\ 5x+3y+z-u=-2 \\ 7x-5y+z+3u=3 \\ 9x+7y-5z-3u=-4 \end{cases}$$

Question 3

- a) $x=3$ et $y=-5$.
- b) $x=2, y=3$ et $z=4$
- c) $x=2, y=3, z=4, u=5$
- d) $x=2, y=5$ et $z=2$
- e) $x=7, y=-5, z=-4, u=-2$

Question 4

- a) Matrice échelonnée-réduite
- b) Matrice échelonnée
- c) Matrice non-échelonnée
- d) Matrice échelonnée-réduite
- e) Matrice échelonnée-réduite

Question 5

- a) Solution unique
- b) Aucune solution
- c) Une infinité de solutions
- d) Solution unique
- e) Solution unique
- f) Aucune solution
- g) Une infinité de solutions
- h) Une infinité de solutions
- i) Aucune solution
- j) Une infinité de solutions
- k) Aucune solution

Question 6

- a) $y=t,$
 $x=3-2t$ où $t \in \mathbb{R}$
- b) $y=t,$
 $x=1+t$ où $t \in \mathbb{R}$
- c) $z=t$ où $t \in \mathbb{R},$
 $y=2+3t,$
 $x=3-2t$
- d) $z=t$ où $t \in \mathbb{R},$
 $y=2+3t,$
 $x=3-5(2+3t)-2t=-7-17t$

Question 7

$$a) \begin{cases} 2x+3y=4 \\ x+2y=5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+\frac{3y}{2}=2 \\ x+2y=5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+\frac{3y}{2}=2 \\ \frac{y}{2}=3 \end{cases} \sim \begin{cases} x+\frac{3y}{2}=2 \\ y=6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Solution : $x=-7, y=6$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \begin{cases} 3x+2y+2z=2 \\ x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+3z=4 \end{cases} &\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+2y+2z=2 \\ 2x+3y+3z=4 \end{cases} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ -4y-7z=-7 \\ 2x+3y+3z=4 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ -4y-7z=-7 \\ -y-3z=-2 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ -y-3z=-2 \\ -4y-7z=-7 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ -y-3z=-2 \\ -4y-7z=-7 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ y+3z=2 \\ 4y+7z=7 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ y+z=2 \\ -5z=-1 \end{cases} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\text{Solution : } x = -\frac{2}{5}, y = \frac{7}{5}, z = \frac{1}{5}$$

Question 8

- a) $x = 7, y = 5$
- b) $x = \frac{3}{7}, y = -\frac{3}{7}$
- c) $x = -1, y = \frac{3}{2}$
- d) $x = 0, y = 0$
- e) $x = \frac{1}{3}, y = -\frac{2}{3}$
- f) $x = 1 + 2t, y = t$ où $t \in \mathbb{R}$
- g) $x = 0, y = \frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2}$
- h) $x = 0, y = \frac{2}{5}, z = \frac{1}{5}$
- i) $x = 0, y = 0, z = 0$
- j) $x = -\frac{1}{2} - t, y = \frac{3}{2}, z = t$ où $y \in \mathbb{R}$
- k) $x = -\frac{1}{8}, y = \frac{3}{4}, z = -\frac{1}{8}$