

Formatif 1

Algèbre linéaire et géométrie vectorielle– Automne 2024– Yannick Delbecque

ceci est un examen préparatoire à l'examen 1 : gardez en tête que l'usage de la calculatrice et de notes est interdit lors des examens.

Question 1

Soit $\vec{u} = (2, 1, -1)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$ et $\vec{w} = (3, -1, 0)$. Effectuer les calculs suivants si possible; indiquer pourquoi un calcul est impossible si c'est le cas.

- a) Angle entre \vec{u} et \vec{v}
- b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$
- c) $\|\vec{u}\|$
- d) $\|\vec{u}\| - \vec{v} \wedge \vec{w}$
- e) $\|\vec{u}\| - \vec{v} \cdot \vec{w}$
- f) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$
- g) $\text{proj}(\vec{u}, \vec{v})$
- h) $(\vec{u} \cdot \vec{v})(\vec{v} + \vec{w})$

Question 2

Trouver les composantes du vecteur $(1, 1, 1)$ dans la base

$$\mathcal{B} = \langle (-1, 0, 1), (2, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle.$$

Question 3

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs quelconques. Démontrer en utilisant la relation entre l'angle entre les vecteurs et le produit scalaire que si l'angle entre \vec{u} et \vec{v} est θ , alors l'angle entre $-\vec{u}$ et \vec{v} est $\pi - \theta$. (Indice : partir de $(-\vec{u}) \cdot \vec{v}$ et utiliser l'identité $-\cos(\theta) = \cos(\pi - \theta)$)

Question 4

Soit $A = (2, 3, 1)$, $B = (-1, 1, 1)$ et $C = (1, 0, 2)$ trois points de \mathbb{R}^3 . Trouver les coordonnées du point D sur la droite AB tel que \overrightarrow{CD} est perpendiculaire à \overrightarrow{AB} .

Question 5

Déterminer si les points $A = (1, 2, 2)$, $B = (0, 1, 2)$, $C = (-1, 0, 1)$ et $D = (2, 1, 1)$ sont coplanaires...

- a) en utilisant un déterminant;
- b) sans utiliser de déterminant!

Question 6

Démontrer en utilisant les propriétés des déterminants que si \vec{w} est une combinaison linéaire $a\vec{u} + b\vec{v}$ de \vec{u} et \vec{v} dans \mathbb{R}^3 , alors $\Delta(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Question 7

Calculer le volume d'un prisme hexagonal de hauteur 2 dont les coordonnées des sommets de la base sont

$A(2, 0, 0)$	$B(1, 1, 0)$	$C(-1, 1, 0)$
$D(-2, 0, 0)$	$E(-1, -1, 0)$	$G(1, -1, 0)$

Question 8

Soit $\vec{u} = (3, 1)$ et $\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

- a) Trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} - t\vec{v}$ est orthogonal à \vec{v} .
- b) Calculer la longueur de la projection orthogonale de \vec{u} sur \vec{v} . Comparez avec le résultat obtenu en a) et expliquer la « coïncidence ».

Question 9

Soit $\vec{u} = (2, 2, 1)$ et $\vec{v} = (1, 0, 1)$. Trouver une base orthonormée $\langle \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \rangle$ telle que \vec{X} soit dans la même direction que \vec{u} et \vec{Y} est orthogonal à \vec{v} .

Solutions

Question 1

- a) $\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{5}}\right)$
 b) 13
 c) $\sqrt{6}$
 d) Non défini
 e) $\sqrt{6} + 1$
 f) 13
 g) $(0, -1/5, -2/5)$
 h) $(-3, 0, -2)$

Question 2

On cherche x, y et z tels que

$$(1, 1, 1) = x(-1, 0, 1) + y(2, 1, 0) + z(0, 1, 1).$$

Si on sépare les composantes, cette équation vectorielle devient

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

En résolvant ce système d'équation on trouve la solution $x = 1, y = 1$ et $z = 0$, d'où

$$(1, 1, 1) = (1, 1, 0)_B.$$

Question 3

La relation entre l'angle et le produit scalaire est

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta).$$

On a donc

$$\begin{aligned} (-\vec{u}) \cdot \vec{v} &= -(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ &= -\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta) \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| - \cos(\theta) \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\pi - \theta). \end{aligned}$$

Comme on vient de montrer que

$$(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\pi - \theta)$$

l'angle entre $-\vec{u}$ et \vec{v} est $\pi - \theta$.

Question 4

En projetant \vec{AC} sur \vec{AB} , on trouve que $\vec{AD} = \left(-\frac{27}{13}, -\frac{18}{13}, 0\right)$. On trouve le point D à partir des coordonnées du point $A : \left(-\frac{1}{13}, \frac{21}{13}, 1\right)$.

Question 5

$$a) \Delta(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Comme les vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} sont linéairement indépendants, les points A, B, C et C ne sont pas coplanaires.

- b) On montre que les vecteurs \vec{AB} , \vec{AC} et \vec{AD} sont linéairement indépendants. Si on a une combinaison linéaire

$$x\vec{AB} + y\vec{AC} + z\vec{AD} = \vec{0}$$

les composantes x, y et z doivent être solution du système d'équation

$$\begin{cases} -x - 2y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ -y - z = 0 \end{cases}$$

En résolvant, on trouve que la seule solution est $x, y, z = 0$.

Question 6

On a par hypothèse que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle &= \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, a\vec{u} + b\vec{v} \rangle \\ &= \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, a\vec{u} \rangle + \Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, b\vec{v} \rangle \\ &= a\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \rangle + b\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{v} \rangle \\ &= a0 + b0 = 0. \end{aligned}$$

Note : on pourrait bien sûr écrire cette solution en utilisant l'autre notation pour les déterminants.

Question 7

Si on connaît l'aire de la base, on peut trouver le volume en la multipliant par la hauteur.

La base est un hexagone. On peut calculer l'aire A de cet hexagone de plusieurs manières, la plus efficace est de considérer ces points comme des points de \mathbb{R}^2 (toutes les cotes sont nulles) et de prendre le déterminant (voir exercice 4 p. 101) :

$$\begin{aligned} A &= \Delta(\vec{AC}, \vec{AE}) \\ &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-3)(-1) - (1)(-3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

La surface de la base est $A = 6$, donc le volume est 12.

Question 8

- a) On veut t tel que

$$(\vec{u} - t\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0.$$

$$(\vec{u} - t\vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

$$\left((3, 1) - t \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} \right) \cdot \frac{(1, -1)}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\left(3 - \frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}} \right) = 0$$

$$\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{t}{2} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{t}{2} \right) = 0$$

$$\frac{2}{\sqrt{2}} - t = 0$$

$$t = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

- b) La longueur de la projection est

$$\begin{aligned} \|\text{proj}(\vec{u}, \vec{v})\| &= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|} \\ &= \frac{(3, 1) \cdot ((1, -1)/\sqrt{2})}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2}} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

Question 9

On prend $\vec{X} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ afin d'avoir un premier vecteur unitaire dans la même direction que \vec{u} . Comme \vec{Y} doit être orthogonal à \vec{X} et à \vec{v} , on prend $\vec{Y} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{v}}{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}$ car $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est perpendiculaire à \vec{X} (qui est parallèle à \vec{u}) et à \vec{v} .

Enfin, Comme \vec{Z} doit être perpendiculaire à \vec{X} et \vec{Y} , on prend $\frac{\vec{X} \wedge \vec{Y}}{\|\vec{X} \wedge \vec{Y}\|}$.

En calculant, on trouve

$$\vec{X} = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

$$\vec{Y} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$\vec{Z} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$