Yannick Delbecque — Département de mathématiques — Cégep de Saint-Laurent
Algèbre linéaire et géométrie vectorielle (201-NYC) — Session Hiver 2024

Formatif 2

Question 1
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation

$$\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{-z}{2}.$$

a) Déterminer la distance entre $\mathcal{D}$ et le point $P = (1,2,3)$.

b) Trouver le point B de $\mathcal{D}$ qui est le plus près de l'origine.

Question 2
Soit $A = (2,1,3)$, $B = (1,-1,2)$ et $C = (0,1,2)$ trois points dans $\mathbb{R}^3$.

a) Donner l'équation normale du plan $\mathcal{P}$ qui passe par A, B et C.

b) Trouver l'équation paramétrique du plan perpendiculaire à $\mathcal{P}$ qui passe par B et C.

Question 3
Soit $\mathcal{D}$ la droite ayant comme équation vectorielle

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t(2,0,-3)$$

et $\mathcal{P}$ le plan d'équation

$$x + 2y + z = 1.$$

a) Déterminer le point de croisement entre la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$.

b) Trouver l'angle entre la droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$.

Question 4
Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 3+t. \end{cases}$$

Trouver l'équation d'une droite à distance 2 de $\mathcal{D}$ et ayant pour vecteur directeur $\vec{v} = (1,1,1)$ (ind. pensez à la distance entre deux droites gauches)

Question 5
Résoudre les systèmes d'équations suivants en déterminant les matrices ERL associées à ces système. Déterminer le rang de ces système et donner *toutes* leur solutions.

a) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x-y+2z=2 \\ 3x+2y+z=3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+y=2 \\ 4x+y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+2y+z=3 \end{cases}$

Question 6

a) Donner la forme échelonnée réduite (ERL) de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en indiquant à chaque étape quelle opération élémentaire sur les lignes est effectuée.

b) En considérant la matrice de la question précédente comme celle d'un système à 4 inconnues x,y,z,u, décrire l'ensemble solution sous forme paramétrique.

Question 7
Déterminer si les vecteurs $\vec{u} = (2,-2,1)$, $\vec{v} = (3,-2,1)$ et $\vec{w} = (-4,2,-1)$ forment une base en résolvant un système d'équation linéaire. Résoudre le système à l'aide de matrices en le réduisant à sa forme échelonnée. Si les vecteurs ne sont pas indépendants, trouver une combinaison linéaire d'un des vecteurs en fonction des deux autres.

Question 8
Vrai ou faux ?

a) Si deux matrices sont L-équivalente, alors elles sont égales.

b) Si un système d'équation est représenté par une matrice $n \times m$ de rang $n-1$, alors l'ensemble solution du système est de dimension 1.

c) Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. La matrice du système d'équation associé à l'équation vectorielle

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = 0$$

est de rang 3 si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont linéairement dépendants.

Solutions

Question 1

a) Le vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est $\vec{v} = (2,1,-2)$ et la droite passe par le point $A = (1,-1,0)$.
$d = \|\overrightarrow{AP} - \mathrm{proj}(\overrightarrow{AP}, \vec{v})\| = \sqrt{17}$

(Calculs partiels : $\overrightarrow{AP} = (0,3,3,)$,
$\mathrm{proj}(\overrightarrow{AP}, \vec{v}) = (-2/3, -1/3, 2/3)$,
$\overrightarrow{AP} - \mathrm{proj}(\overrightarrow{AP}, \vec{v}) = \overrightarrow{AP} - \mathrm{proj}(\overrightarrow{AP}, \vec{v}) =$
$(2/3, 10/3, 7/3)$.

b) Le point B est
$B = A + \mathrm{proj}(\overrightarrow{AO}, \vec{v}) = (7/9, -10/9, 2/9)$.

Question 2

a) On trouve une normale au plan

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}.$$

Le point A est un point sur le plan.

On trouve l'équation normale : soit $P = (x,y,z)$ un point quelconque sur le plan. On doit avoir que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} &= 0\\ (x-2, y-1, z-3) \cdot (2,1,-4) &= 0\\ 2(x-2) + (y-1) - 4(z-3) &= 0\\ 2x + y - 4z &= -7\end{aligned}$$

L'équation normale est donc

$$2x + y - 4z = -7.$$

b) Pour trouver l'équation paramétrique du plan cherché, on doit avoir un point sur ce plan et deux vecteurs directeurs linéairement indépendants.

Le point B est un point sur le plan.

Comme le plan passe par B et C, le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur. Comme le plan cherché est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, le vecteur $\vec{n}$ est aussi un vecteur directeur. On trouve donc l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 1 + 2s - t \\ y = -1 + s + 2t \\ z = 2 - 4s. \end{cases}$$

Question 3

a) Soit $(x,y,z) = (1,2,3) + t(2,0,-3)$. Ce point est aussi sur le plan ssi il satisfait l'équation $x + 2y + z = 1$. On doit donc avoir que

$$(1 + 2t) + 2(2) + (3 - 3t) = 1,$$

On trouve que $t = 7$.

Le point de croisement est donc

$$(x,y,z) = (1,2,3) + (7)(2,0,-3) = (15,2,-18).$$

b) Un vecteur directeur de la droite est $(2,0,-3)$ et un vecteur normal au plan est $\vec{n} = (1,2,1)$.
L'angle entre la droite et le plan est

$$\pi/2 - \text{ l'angle entre la droite et } \vec{n}$$

L'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{n}$ est

$$\phi = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{13}}\right).$$

L'angle entre la droit et le plan est donc $\pi/2 - \phi$.

Question 4

La droite $\mathcal{D}$ a comme vecteur directeur $\vec{u} = (1,-2,1)$ et par le point $A = (1,-1,3)$. Si on veut une droite à distance 2, on peut prendre un point de $\mathcal{D}$, de déplacer d'une distance 2 dans la direction d'un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ce qui nous donne un point B à distance 2 de $\mathcal{D}$. La droite passant par ce point B et ayant comme vecteur directeur $\vec{v}$ est, par construction, à distance 2.

$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-3,0,3)$.

$$\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \left((-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$B = A + 2\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1, -1, \frac{\sqrt{2}}{2} + 3\right)$$

Question 5

a) $x = 1$, $y = -1/5$, $z = 2/5$

b) $x = 1$, $y = -1$

c) $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$

Question 6

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 4t \\ z = 0 \\ u = t \end{cases}$

Question 7

On commence par vérifier si les vecteurs sont linéairement indépendants. On utilise le théorème sur l'indépendance linéaire : on montre que si $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$, alors $x,y,z = 0$.

L'équation vectorielle $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ devient, quand on sépare les composantes, le système d'équation linéaires

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On échelonne cette matrice :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a donc plusieurs solutions. Une solution doit satisfaire les relations $y = 2z$ et $x = -z$. Par exemple $x = -1$, $y = 2$ et $z = 1$ est une solution possible où $x,y,z \neq 0$. Les vecteurs ne sont donc pas linéairement indépendants.

Pour trouver une combinaison linéaire, écrivons la relation vectorielle obtenue quand on utilise la solution particulière que nous venons de donner :

$$-\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}.$$

Pour trouver une combinaison linéaire, on peut simplement isoler $\vec{u}$. On trouve

$$\vec{u} = 2\vec{v} + \vec{w}.$$

(On pourrait aussi isole $\vec{v}$ ou $\vec{w}$.)

Question 8

a) Faux

b) Vrai

c) Faux