Yannick Delbecque — Département de mathématiques — Cégep de Saint-Laurent

Devoir 3 (bonus)

1 Objectif

Le but de ce devoir est d'arriver à décomposer une fonction périodique sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$ en une somme de fonctions sinus et cosinus. On appelle une telle somme une **série de Fourier**.

Les applications des séries de Fourier sont très nombreuses. C'est ce genre de décomposition qui explique le rôle important des harmoniques en musique – toute onde sonore périodique pouvant être décomposée en une somme d'ondes sinusoïdales à l'aide des idées présentées dans ce devoir. C'est aussi les séries de Fourier qui expliquent l'analyse spectrale, utilisée en physique et en chimie. De manière générale, les séries de Fourier explique mathématiquement le lien entre un *signal* périodique et son *spectre*.

2 Rappel d'algèbre linéaire

En algèbre linéaire vous avez vu que les vecteurs géométriques satisfont les huit propriétés suivantes :

V1 $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
V2 $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
V3 $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
V4 $\vec{u}+(-\vec{u})=0$
V5 $a(b\vec{u})=(ab)\vec{u}$
V7 $(a+b)\vec{u}=a\vec{u}+b\vec{u}$
V6 $1\vec{u}=\vec{u}$
V8 $a(\vec{u}+\vec{v})=a\vec{u}+a\vec{v}$

On vous a même répété que la théorie des vecteurs repose entièrement sur ces huit propriétés et celles des opérations vectorielles, comme le produit scalaire et le produit vectoriel. N'importe quel ensemble d'objets mathématiques muni d'opérations ayant ces propriétés se comporte exactement comme les vecteurs géométriques. On appelle un tel ensemble un **espace vectoriel**.

Nous avons étudié en classe des vecteurs géométriques ; leurs propriétés ont servi à motiver intuitivement l'adoption de ces axiomes V1 – V8. Nous avons montré que dès qu'on a un espace vectoriel satisfaisant ces axiomes, un vecteur $\vec{v}$ peut être présenté comme une liste de composantes dans une base donnée. Par exemple, un vecteur $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire

$$\vec{v}=(3,-1,2)$$

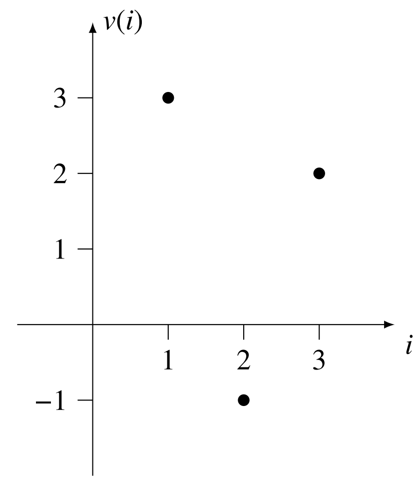
par rapport la à base $\langle \vec{i},\vec{j},\vec{k}\rangle$. Si on numérote les composantes de $\vec{v}$, on peut aussi décrire ce vecteur par

$$v_1=3, v_2=-1, v_3=2.$$

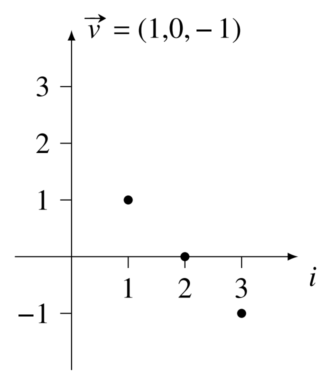
Ainsi décrit, un vecteur est une fonction qui associe à chaque numéro de composante la valeur de cette composante. Si on utilisait la notation fonctionnelle usuelle pour les fonctions réelles, on écrirait

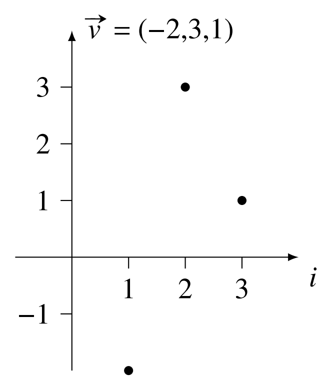
$$v(1)=3, v(2)=-1, v(3)=2.$$

On peut même représenter graphiquement cette fonction comme on le fait avec une fonction réelle :

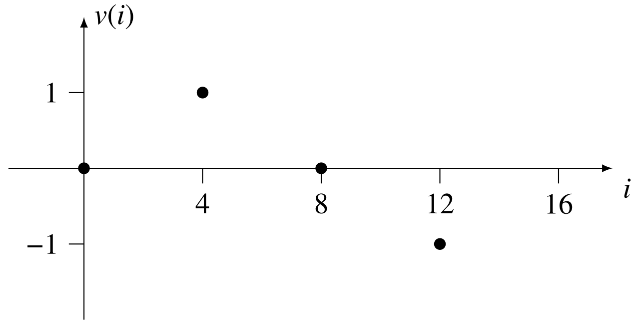


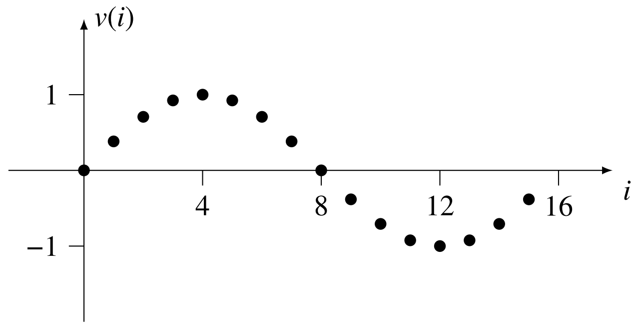
Si on fait de même pour les vecteurs $(1,0,-1)$ et $(-2,3,1)$, obtient :

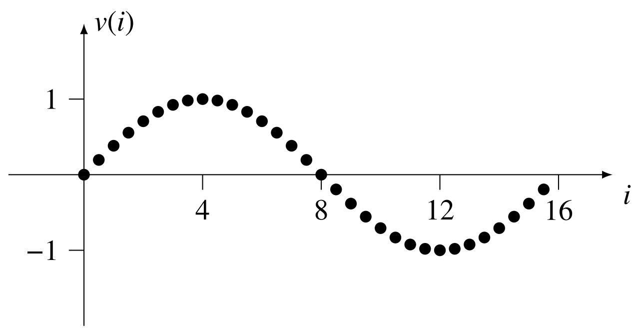




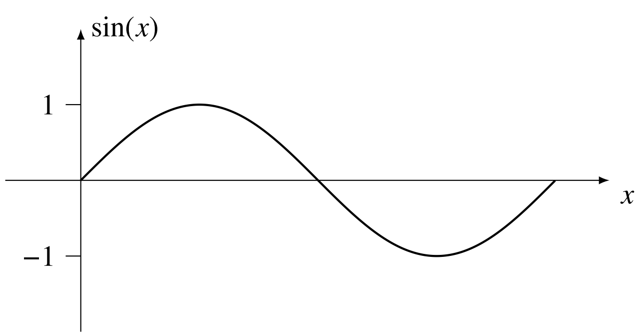
Il n'y a pas de limite à la dimension d'un vecteur : on peut imaginer un vecteur dans un espace ayant une dimension plus grande que trois. Voici des vecteurs de dimension 4, 16 et 32 :







Le lecteur alerte aura remarqué la frappante ressemblance avec une fonction bien connue :



Ceci devrait suggérer au lecteur astucieux l'idée suivante : pousser cette idée à la limite et considérer des vecteurs avec une *infinité de composantes*. Un tel vecteur aurait une composante $f(x)$ pour chaque valeur *réelle* de x, de la même manière qu'un vecteur « normal » a une composante v_i pour chaque valeur entière de i. Une *fonction réelle* semble donc pouvoir être considéré comme un vecteur. C'est cette intuition que nous allons rendre plus rigoureuse dans ce qui va suivre. Nous allons nous intéresser au cas particulier des fonctions périodiques car c'est ce type de fonction qui est utile pour l'étude des séries de Fourier. Nous allons étudier l'ensemble des fonctions périodiques de période 2π pour montrer qu'il est un *espace vectoriel*.

Une fonction
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
est **périodique** de période T si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a
$$f(x+T) = f(x).$$

Dans ce devoir, on ne considérera que des fonctions périodiques de période 2π, comme $\cos(x)$ et $\sin(3x)$.

On définit les opérations de base sur les vecteurs pour ces fonctions, qu'on peut voir comme des vecteurs de la manière décrite précédemment.

Si on a deux fonctions périodiques de période 2π
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ et } h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
on définit le produit par un scalaire kf, où $K \in \mathbb{R}$ et la somme $f+g$ par
$$[kf](x) = k(f(x)) \text{ et}$$
$$[f+g](x) = f(x)+g(x).$$

Les opérations sont donc définies composante à composante, comme pour les vecteurs de dimension finie.

Le produit par un scalaire kf d'une fonction périodique f de période 2π est aussi périodique de même période :
$$[kf](x+2\pi) = k(f(x+2\pi)) = kf(x) = [kf](x)$$

Question 1 — Vérifier que la somme de fonctions périodiques de période 2π est aussi une fonction périodique de période 2π.

L'ensemble V des fonctions périodiques de période 2π muni de ces opérations est un espace vectoriel, c'est à dire qu'il satisfait les propriétés V1–V8. Par exemple, la propriété V1 est satisfaite : $f+g=g+f$ car pour chaque composante on a

$$[f+g](x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = [g+f](x).$$

Question 2 — Déterminer quelle est la fonction qui joue le rôle de vecteur zéro et définir l'opération $-f$.

Choisir et vérifier une des propriétés V2–V4 et une des propriétés V5–V8.

---

3 Produit scalaire

Un produit scalaire sur un espace vectoriel est une opération supplémentaire sur les vecteurs qui satisfait les trois propriétés suivantes :

PS1 $\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle$
PS2 $\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w}\rangle = \langle \vec{u}, \vec{w}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{w}\rangle$
PS3 $\langle a\vec{u}, \vec{v}\rangle = a\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$
PS4 $\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle \geq 0$ et on a égalité ssi $\vec{u}=0$.

Pour des vecteur dans $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire usuel est définit de la manière suivante : pour $\vec{u} = (a_1, \cdots, a_n)$ et $\vec{v} = (b_1, \ldots, b_n)$, on pose

$$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k.$$

On peut définir un produit scalaire sur l'ensemble des fonctions de période 2π en remplaçant la somme par une intégrale sur l'intervalle $[-\pi,\pi]$. Le produit scalaire de f et g est définit par

$$\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

Question 3 — Calculer le produit scalaire de $f(x)=x$ et $g(x)=\cos(x)$.

Question 4 — Montrer que pour $f(x)=\sin(x)$ et $g(x)=\cos(x)$ on a $\langle f,g\rangle = 0$.

Le résultat de la question précédente implique que sin et cos sont des fonctions *orthogonales* par rapport à ce produit scalaire. Nous nous servirons plus loin du fait qu'il y a des fonctions orthogonales pour trouver une base V.

Question 5 — Vérifier que les trois propriétés PS1–PS3 sont satisfaites pour le produit scalaire de fonctions.

Dans le reste du devoir, comme on utilise très souvent les fonctions $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$ pour $n \geq 0$, il est opportun de d'introduire une notation pour y référer :

$$\varphi_n(x) = \cos(nx) \qquad \psi_n(x) = \sin(nx).$$

Question 6 — Vérifier les égalités suivantes :

$$\varphi_0 = 1 \qquad \psi_0 = 0 \qquad \langle \varphi_0, \varphi_0\rangle = 2\pi$$
$$\langle \varphi_n, \varphi_n\rangle = \pi \quad (n \neq 0) \qquad \langle \psi_n, \psi_n\rangle = \pi \quad (n \neq 0)$$
$$\langle \psi_n, \psi_m\rangle = 0 \quad (n \neq m)$$

Comme $||\varphi_n|| = ||\psi|| = \sqrt{\pi}$, on peut obtenir des vecteurs de norme 1 en... normalisant :

$$\left\|\frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\| = 1 \qquad \left\|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}}\right\| = 1.$$

On normalise aussi φ_0 :

$$\overline{\varphi}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Les relations démontrées à la question **??** impliquent que

$$\overline{\varphi}_n, n \geq 0 \quad \overline{\psi}_n, n \geq 1$$

forment une base orthonormale. Il faut noter que l'on ne prend pas $\overline{\psi}_0 = 0$ dans la base.

4 Projections

La projection de orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est

$$\text{proj}(\vec{u}, \vec{v}) = \left\langle \vec{u}, \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}\right\rangle \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}.$$

Dans $\mathbb{R}^3$, on peut se servir de la projection pour trouver les composantes d'un vecteur dans une base orthonormale donnée. Si $\vec{u} = (x,y,z)$ est un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Les composantes x, y et z sont les projections de $\vec{u}$ sur les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. En général, si v_1, v_2 et v_3 forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire

$$\vec{u} = \sum_{n=1}^{3} a_n \vec{v}_n$$

où les composantes sont les projections sur les vecteurs de la base

$$a_n = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v}_n \rangle}{\langle \vec{v}_n, \vec{v}_n \rangle}.$$

Question 7 — Démontrer que dans $\mathbb{R}^3$, si

$$\vec{u} = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + a_3 \vec{v}_3,$$

alors a_k doit nécessairement être $\frac{\langle \vec{u}, \vec{v}_k \rangle}{\langle \vec{v}_k, \vec{v}_k \rangle}$ pour $k = 1,2,3$.

(Indice : ne pas travailler avec les composantes ! Prendre plutôt le produit scalaire avec $\vec{v}_n$ de chaque côté de l'égalité et utiliser le fait que $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j \rangle = 0$ si $i \neq j$).

---

5 Séries de Fourier

On utilise cette idée pour pour calculer les composantes d'une fonction périodique f dans la base formée orthogonale par les fonctions φ_n et ψ_n. On trouve ces composantes en utilisant la formule démontrée f sur les vecteurs φ_n et ψ_n.

Question 8 — Montrer que pour $n > 0$ on a

$$a_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \frac{1}{\pi}\langle f, \varphi_n \rangle \qquad b_n = \frac{\langle f, \psi_n \rangle}{\langle \varphi_n, \varphi_n \rangle} = \frac{1}{\pi}\langle f, \psi_n \rangle$$

et pour $n = 0$,

$$a_0 = \frac{\langle f, \psi_0 \rangle}{\langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle} = \frac{1}{2\pi}\langle f, \psi_0 \rangle$$

La fonction f peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base φ_n et ψ_n. C'est cette combinaison linéaire que l'on appelle la *série de Fourier* de la fonction f :

Séries de Fourier

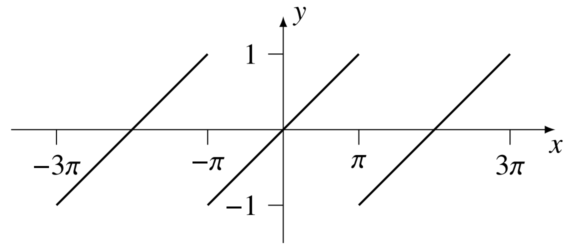
$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

où les coefficients sont données par :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx$$
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

Heureusement pour le lecteur, nous ne serons pas trop exigeant au sujet de la convergence de telles séries, ce problème ayant causé beaucoup de maux de têtes à Fourier et à ses collègues mathématiciens.

Question 9 — Montrer que la série de Fourier de la fonction périodique « triangulaire » f



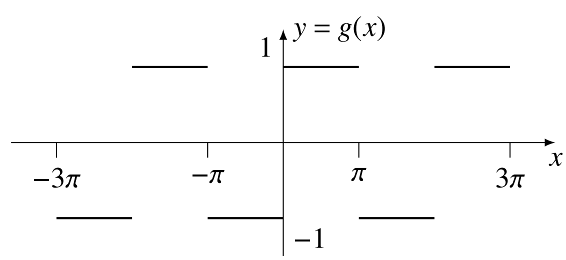
$$f(x) = x \text{ pour } x \in [-\pi,\pi]$$

est

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx).$$

La suite des coefficients $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$ devant les fonctions $\cos(nx)$ est appelée le *spectre* de f. Pour chaque n, la fréquence de $\sin(nx)$ est n fois la fréquence de $\sin(x)$. Le coefficient b_n est l'amplitude de la contribution de $\sin(nx)$ à la fonction $f(x)$. C'est ce qu'un *analyseur de spectre* affiche : l'amplitude b_n en fonction de la fréquence n. C'est ces amplitudes qui détermine (partiellement) le *timbre* d'un son : c'est ce qui fait la différence entre une même note à la flûte ou à la trompette.

Question 10 — Montrer que la série de Fourier de la fonction périodique « carrée » g



$$g(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-\pi,0] \\ 1 & x \in]0,\pi] \end{cases} \qquad \text{pour } x \in [-\pi,\pi]$$

est

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin(x)}{1} + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right).$$
