

# Réduction et algorithme de Gauss-Jordan

## Exercices

### Question 1

Représenter les systèmes d'équation linéaires suivants sous forme matricielle.

$$a) \begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x-y=2 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} -x+y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x+2y+z=1 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y-z=3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -\frac{2}{3} \\ \frac{5x}{6} - \frac{3y}{4} = 1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} x+z=1 \\ x-y=2 \\ y-z=3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 4x=2 \\ x+y=1 \end{cases}$$

### Question 2

Écrire le système d'équations linéaires correspondant aux matrices suivante en utilisant les variables  $x, y, z$  et  $u$ .

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 7 & -5 & 1 & 3 & 3 \\ 9 & 7 & -5 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

### Question 3

Donner la solution des systèmes d'équation linéaires représentés par les matrices suivantes. Utilisez les variables  $x, y, z$  et  $u$ , dans cet ordre.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

### Question 4

Identifier les matrices qui sont sous forme échelonnée ou échelonnée-réduite ou non-échelonnée.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

### Question 5

Dire si les systèmes d'équations correspondant aux matrices suivantes ont une seule solution, aucune solution ou une infinité de solution.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$j) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$k) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Question 6

Les systèmes d'équations correspondant aux matrices suivantes ont une infinité de solutions. Donner toutes les solutions à l'aide de paramètres.

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

### Question 7

Appliquer la suite de transformations indiquées pour obtenir la forme échelonnée du système d'équation et en donner la solution. Faire les mêmes opérations sur la matrice correspondante.

$$a) \begin{cases} 2x+3y=4 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

Opérations :

1.  $L_1 \leftarrow L_1 \times \frac{1}{2}$
2.  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
3.  $L_2 \leftarrow L_2 \times 2$

$$b) \begin{cases} 3x+2y+2z=2 \\ x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+3z=4 \end{cases}$$

Opérations :

1.  $L_1 \leftrightarrow L_2$
2.  $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$
3.  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
4.  $L_2 \leftrightarrow L_3$
5.  $L_2 \leftarrow L_2 \times (-1)$  et
6.  $L_3 \leftarrow L_3 \times (-1)$
7.  $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2$

### Question 8

Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants en utilisant les matrices et la réduction.

$$a) \begin{cases} -2x+3y=1 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 5x-2y=3 \\ 2x-5y=3 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} x+2y=2 \\ 3x+4y=3 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x-y=1 \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} x-2y=1 \\ -2x+4y=-1 \end{cases}$$

$$g) \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ x+2y=1 \\ 3x+2y=1 \end{cases}$$

$$h) \begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+2y+z=1 \\ -2x+2y+z=1 \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} x-y+2z=0 \\ x+2y+z=0 \\ -2x+2y+z=0 \end{cases}$$

$$j) \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-2 \\ 3x-y+3z=-3 \end{cases}$$

$$k) \begin{cases} y-2z=1 \\ 2x+2y+2z=1 \\ 3x+2y+z=1 \end{cases}$$

## Solutions

### Question 1

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{3}{6} & -\frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$$

$$d) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$e) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$f) \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$g) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

### Question 2

$$a) \begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+5y=6 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 2x=-2 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 2x=3 \\ -y=0 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} -x+2y+3z=1 \\ 2x+y-z=2 \\ 2y-z=3 \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=3 \end{cases}$$

$$f) \begin{cases} 3x+2y+z-u=1 \\ 5x+3y+z-u=-2 \\ 7x-5y+z+3u=3 \\ 9x+7y-5z-3u=-4 \end{cases}$$

### Question 3

- a)  $x=3$  et  $y=-5$ .
- b)  $x=2, y=3$  et  $z=4$
- c)  $x=2, y=3, z=4, u=5$
- d)  $y=1$  et  $y=2$
- e)  $x=2, y=5$  et  $z=2$
- f)  $x=7, y=-5, z=-4, u=-2$

### Question 4

- a) Échelonnée-réduite
- b) Échelonnée
- c) Non-échelonnée
- d) Échelonnée-réduite
- e) Échelonnée-réduite

### Question 5

- a) Solution unique
- b) Aucune solution
- c) Une infinité de solutions
- d) Solution unique
- e) Solution unique
- f) Aucune solution
- g) Une infinité de solutions
- h) Une infinité de solutions

i) Aucune solution

j) Une infinité de solutions

k) Aucune solution

### Question 6

$$a) y=t, x=3-2t \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

$$b) y=t, x=1+t \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

$$c) z=t \text{ où } t \in \mathbb{R}, y=2+3t, x=3-2t$$

$$d) z=t \text{ où } t \in \mathbb{R}, y=2+3t, x=3-5(2+3t)-2t = -7-17t$$

### Question 7

$$a) \begin{cases} 2x+3y=4 \\ x+2y=5 \end{cases} \sim \begin{cases} x+\frac{3y}{2}=2 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+\frac{3y}{2}=2 \\ \frac{y}{2}=3 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+\frac{3y}{2}=2 \\ y=6 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Solution :  $x=-7, y=6$ .

$$b) \begin{cases} 3x+2y+2z=2 \\ x+2y+3z=3 \\ 2x+3y+3z=4 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+2y+2z=2 \\ 2x+3y+3z=4 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ -4y-7z=-7 \\ 2x+3y+3z=4 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ -4y-7z=-7 \\ -y-3z=-2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ -y-3z=-2 \\ -4y-7z=-7 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ -y-3z=-2 \\ -4y-7z=-7 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ y+3z=2 \\ 4y+7z=7 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+2y+3z=3 \\ y+3z=2 \\ -5z=-1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 0 & -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ 0 & -4 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Solution : } \begin{cases} x=-\frac{2}{5}, \\ y=\frac{7}{5}, \\ z=\frac{1}{5}. \end{cases}$$

### Question 8

- a)  $x=7, y=5$
- b)  $x=\frac{3}{7}, y=-\frac{3}{7}$
- c)  $x=-1, y=\frac{3}{2}$
- d)  $x=0, y=0$
- e)  $x=\frac{1}{3}, y=-\frac{2}{3}$
- f)  $x=1+2t, y=t \text{ où } t \in \mathbb{R}$
- g)  $x=0, y=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{2}$
- h)  $x=0, y=\frac{2}{5}, z=\frac{1}{5}$
- i)  $x=0, y=0, z=0$
- j)  $x=-\frac{1}{2}-t, y=\frac{3}{2}, z=t \in \mathbb{R}$
- k)  $x=-\frac{1}{8}, y=\frac{3}{4}, z=-\frac{1}{8}$