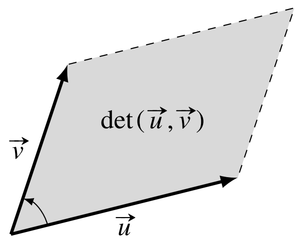
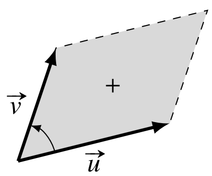
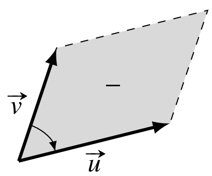
Déterminants 2×2

Définition. Le déterminant 2×2 est une fonction prenant deux vecteurs $\vec{u} = (a,b)$ et $\vec{v} = (c,d)$ et donnant un nombre noté $\det(\vec{u},\vec{v})$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (qui est géométriquement l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$).







(D1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

(D2) $\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0$

(D3) $\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(D4) $$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c & d \end{vmatrix}$$

(D5) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$

Théorème. Le déterminant 2×2 est

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

Proposition. Le système d'équation

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

a une solution unique si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Proposition (Règle de Cramer)**.** Si le système d'équation

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

a une solution unique, celle-ci est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \text{ et } y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}.$$

Exercices supplémentaires

Question 1
Calculer les déterminants suivants.

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1/2 & \sqrt{5} \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{vmatrix}$

Question 2
Déterminer si les systèmes d'équation suivants ont une solution unique à l'aide du déterminant.

a) $\begin{cases} x - 10y = 888 \\ -10x + 100y = 999 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \sqrt{2} \\ \frac{x}{3} + \frac{3y}{4} = \sqrt{3} \end{cases}$

Question 3
Utiliser la règle de Cramer, si possible, pour trouver la solution des systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

Question 4
Évaluer le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix}$. Que remarquez vous ?

Question 5
Identifier les propriétés utilisés à chacune des égalités de ce calcul.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \\ &= 4\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Question 6
Montrer en utilisant la formule de calcul d'un déterminant 2×2 que le déterminant est le même si on transformes les lignes en colonnes :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

Question 7
Le résultat démontré à la question précédente permet d'utiliser les propriétés (D1) – (D5) sur les colonnes plutôt que sur les lignes. Énoncer l'équivalent de (D2), (D3) et (D4) sur les colonnes.

Solutions

Question 1

a) 5

b) $\frac{-1}{2}$

c) 0

d) On peut éviter de calcul avec des fractions en utilisant les propriétés des déterminants.

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{vmatrix} &= \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \end{vmatrix} \\ &= -\frac{1}{5}\begin{vmatrix} \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{7}\right)\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

Question 2

a) Pas une solution unique car $\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ -10 & 100 \end{vmatrix} = 0$

b) Solution unique car $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7 \neq 0$

c) Solution unique car $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \frac{19}{72} \neq 0$

Question 3

a) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{10}{7} \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{7}$

b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2} \qquad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}$

Question 4

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} &= (a \cdot d - b \cdot 0) \\ &= ab\end{aligned}$$

Le déterminant est le produit des valeurs sur la diagonale à cause de la valeur zéro.

Question 5

Dans l'ordre : (D4), (D2) et (D3)

Question 6

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ab - bd = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

Question 7

(D2) $\begin{vmatrix} a & a \\ b & b \end{vmatrix} = 0$

(D3) $\begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$

(D4) $\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & b \\ c_1 + c_2 & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b \\ c_1 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b \\ c_2 & d \end{vmatrix}$