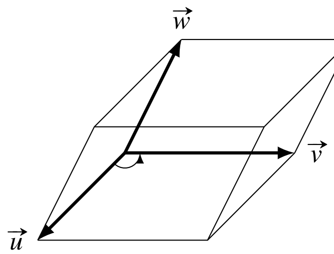
Déterminant 3×3

Définition. Le déterminant 3×3 de trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est le volume du parallélépipède engendré par ces vecteurs.



Le signe du déterminant dépend de l'orientation des vecteurs : positif si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (dans l'ordre) respecte la *règle de la main droite*.

Le déterminant 3×3 satisfait les propriétés suivantes.

(D1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$

(D2) Le déterminant est nul dès qu'une ligne est répétée.

(D3) $\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

(D4) $\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(D5) Échanger deux lignes du déterminant en change le signe.

(D6) Échanger deux colonnes du déterminant en change le signe.

Théorème. Le déterminant 3×3 est

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Règle de Sarrus :

$$\begin{array}{ccc|cc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} +a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{31}a_{21}a_{32} \\ -a_{31}a_{22}a_{13}-a_{11}a_{32}a_{23}-a_{21}a_{12}a_{33} \end{array}$$

Proposition. Le système d'équation

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

a une solution unique si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Proposition (Règle de Cramer)**.** Si le système d'équation

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases}$$

a un solution unique, celle-ci est

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Exercices supplémentaires

Question 1

Calculer les déterminants suivants.

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 10 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Question 2

Déterminer si les systèmes d'équation suivants ont une solution unique à l'aide du déterminant.

a) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z = \sqrt{2} \\ 2x + y2z = \sqrt{3} \\ 3x + 2y + z = \sqrt{17} \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{3z}{2} = \pi \\ \frac{x}{3} + \frac{2y}{3} + z = \pi^2 \\ 2x + y + z = \pi^3 \end{cases}$

Question 3

Utiliser la règle de Cramer, si possible, pour trouver la solution des systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ -x + 2y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$

Question 4

Évaluer le déterminant suivant. Que remarquez-vous ?

$$\begin{vmatrix} a & 5 & 6 \\ 0 & b & 7 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

Question 5

Identifier les propriétés utilisés à chacune des égalités de ce calcul.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & -8 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -8 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 0 \\ &= 2\begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Solutions

Question 1

a) -6 b) 0 c) 40 d) 0

Question 2

a) Solution unique car

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

b) Solution unique car

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

c) Solution unique car

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{6}(-10) = -\frac{5}{3} \neq 0 \end{aligned}$$

Question 3

a) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{10}{7}$ $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{7}$

b) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{3}{2}$ $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{2}$

c) $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{-2} = -2$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-2}{-2} = 1$

$z = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-8}{-2} = 4$

Question 4

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & 5 & 6 \\ 0 & b & 7 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} b & 7 \\ 0 & c \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 0 & c \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= a\begin{vmatrix} b & 6 \\ 0 & c \end{vmatrix} - 5(0) + 6(0) \\ &= a \cdot (b \cdot c - 6 \cdot 0) \\ &= abc \end{aligned}$$

Le déterminant est le produit des valeurs sur la diagonale à cause du "triangle" de zéros.

Question 5

Dans l'ordre : (D4), (D2) et (D3)