Combinaisons linéaires, indépendance linéaire et bases

Rappels

Définition. Une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$ est une expression de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \vec{v}_k = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \ldots + a_n \vec{v}_n$$

Définition. Un ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ est **linéairement indépendant** si aucun des vecteurs de l'ensemble ne peut être exprimé comme une combinaison linéaire des autres vecteurs.

Définition. Un ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ engendre un espace vectoriel si tout vecteur $\vec{w}$ de celui-ci peut être exprimé comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$, ..., $\vec{v}_k$, autrement dit s'il y a des scalaires a_1, a_2, ... a_n tels que

$$\vec{w} = \sum_{k=1}^{n} a_k \vec{v}_k = a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \ldots + a_n \vec{v}_n$$

Théorème. Un ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ est **linéairement indépendant** si et seulement si l'unique combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ donnant $\vec{0}$ est

$$0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \ldots + 0\vec{v}_n.$$

Théorème. Toutes les bases d'un espace vectoriel ont la même taille.

Définition. La dimension d'un espace vectoriel est le nombre de vecteurs dans n'importe quelle base de cet espace.

Proposition. Le nombre de vecteurs dans un ensemble générateur d'un espace vectoriel est toujours plus grand ou égal à sa dimension.

Le nombre de vecteurs dans un ensemble linéairement indépendant est toujours plus petit ou égal à sa dimension.

Corollaire. Un ensemble de n vecteurs linéairement indépendant dans un espace de dimension n est toujours une base.

Proposition. Si les vecteurs $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ forment une base d'un espace vectoriel et que w est un vecteur de cet espace, alors il y a une seule manière d'écrire $\vec{w}$ comme une combinaison linéaire des vecteurs de la base.

Définition. Les composantes d'un vecteur $\vec{w}$ dans une base ordonnée $\mathcal{B} = \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \rangle$ sont les coefficients de l'unique combinaison linéaire

$$\vec{w} = a_1 \vec{v}_1 + \ldots + a_n \vec{v}_n.$$

On écrit alors

$$\vec{w} = (a_1, \ldots, a_n)_{\mathcal{B}}.$$

Théorème. Si $\mathcal{B}$ est une base ordonnée d'espace vectoriel, $\vec{u} = (u_1, \ldots u_n)$, $\vec{w} = (\vec{w}_1, \ldots \vec{w}_n)$ et a est une scalaire, alors l'addition vectorielle et le produit par un scalaire peuvent se calculer composante par composante.

$$\vec{u} + \vec{w} = (u_1 + w_1, \ldots, u_n + w_n)$$

$$a\vec{u} = (au_1, \ldots, au_n)$$

Proposition. Deux vecteurs d'un espace vectoriel donné sont égaux s'ils ont les mêmes composantes.

Exercices supplémentaires

Question 1
Exprimer les vecteurs comme une combinaison linéaires des vecteurs donnés.

a) (2,1) comme combinaison linéaire de $(-1,1)$ et (1,2).

b) (1,1) comme combinaison linéaire de $(-1,1)$ et (1,1).

c) (1,1) comme combinaison linéaire de (1,2) et (2,1).

d) (1,2,3) comme comb. lin. de (0,1,1), (1,0,1) et (1,1,0).

e) (1,2,3) comme comb. lin. de (1,1,1), (0,1,1) et (0,0,1).

Question 2
Déterminer algébriquement si les ensemble de vecteurs suivants sont linéairement indépendants. S'ils sont linéairement dépendent, donner un exemple montant qu'il est possible d'exprimer un des vecteurs donné comme une combinaison linéaire des autres.

a) (1,1) et (0,1)

b) (1,1) et (3,1)

c) $(1,-1)$ et $(-2,2)$

d) (1,1) et $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$

e) $\left(-1,\frac{1}{8}\right)$ et $\left(-\frac{1}{4},2\right)$

f) (1,0,1), (2,2,1) et (0,1,1).

g) (1,1,1), (2,2,1) et (0,0,1).

h) (1,0,1), $(-1,1,1)$ et $(-1,2,3)$.

Question 3
Déterminer si les ensembles de vecteurs suivants sont des bases.

a) (1,1) et (0,1)

b) (1,1), (0,1) et (1,0)

c) (1,1)

d) (1,0,0), (0,1,0) et (0,0,2).

Question 4
Expliquer pourquoi un ensemble de n vecteurs linéairement indépendant dans un espace de dimension n est toujours une base.

Solutions

Question 1

a) $(2,1) = (-1)(-1,1)+(1)(1,2)$.
(Écrire (2,1) comme une combinaison linéaire quelconque de $(-1,1)$ et $(1,2)$, transformer en système d'équation et résoudre.)

b) $(1,1) = (0)(-1,1)+(1)(1,1)$.

c) $(1,1) = \left(\frac{1}{3}\right)(-1,1)+\left(\frac{1}{3}\right)(1,1)$.

d) $(1,2,3) = (2)(0,1,1)+(1)(1,0,1)+(0)(1,1,0)$.

e) $(1,2,3) = (-1)(0,1,1) + (-1)(1,0,1) + (3)(1,1,0)$.

Question 2

a) Linéairement indépendant, car l'équation

$$x(1,1)+y(0,1) = (0,0),$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y=0, \end{cases},$$

a comme seule solution (0,0).

b) Linéairement indépendant, car

$$x(1,1)+y(3,1) = (0,0),$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x+3y=0 \\ x+y=0, \end{cases}$$

a comme seule solution (0,0).

c) Linéairement dépendant, car

$$x(1,-1)+y(-2,2) = (0,0),$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x-y=0 \\ -2x+2y=0, \end{cases}$$

a une infinité de solutions, par exemple (2,1). On a par exemple que

$$-2(1,-1) = (-2,2).$$

d) Linéairement indépendant, car

$$x(1,1)+y\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = (0,0),$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x+y=0 \\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}=0, \end{cases}$$

a comme seule solution (0,0).

e) Linéairement indépendant, car

$$x\left(-1,\frac{1}{8}\right)+y\left(-\frac{1}{4},2\right) = (0,0),$$

c'est à dire

$$\begin{cases} -x+\frac{y}{8}=0 \\ -\frac{x}{4}+2y=0, \end{cases}$$

a comme seule solution (0,0).

f) Linéairement dépendant, car

$$x(1,0,1)+y(2,2,1)+z(0,1,1) = (0,0,0),$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x+z=0 \\ 2x+2y+z=0 \\ y+z=0 \end{cases}$$

a comme solution unique $x=0$, $y=0$ et $z=0$.

g) Linéairement dépendant, car

$$x(1,1,1)+y(2,2,1)+z(0,0,1) = (0,0,0),$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x+2y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases}$$

a une infinité de solution, par exemple $x = -2$, $y = 1$ et $z = 1$. Dans ce cas, on a la combinaison linéaire

$$(-2(1,1,1)+(2,2,1)+(0,0,1) = 0,$$

et donc, par exemple,

$$(0,0,1) = 2(1,1,1)-(2,2,1).$$

h) Linéairement dépendant, car

$$x(1,0,1)+y(-1,1,1)+z(-1,2,3) = (0,0,0),$$

c'est à dire

$$\begin{cases} x-y-z=0 \\ y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases}$$

a une infinité de solution, par exemple $x = -1$, $y = -2$ et $z = 1$. Dans ce cas, on a la combinaison linéaire

$$(-(1,0,1)-2(-1,1,1)+(-1,2,3) = 0,$$

et donc, par exemple,

$$(1,0,1) = -2(-1,1,1)+(-1,2,3).$$

Question 3

a) Deux vecteurs linéairement indépendant (voir question précédente) dans un espace de dimension 2 (car les vecteurs ont deux composantes) forment une base

b) Comme les vecteurs ont deux composantes, l'espace vectoriel est de dimension 2. Trois vecteurs ne peuvent pas être linéairement indépendant dans un espace de dimension 2. Les vecteurs ne forment donc pas une base.

c) Comme le vecteur a deux composantes, l'espace vectoriel est de dimension 2. Toutes les bases doivent avoir 2 vecteurs, alors l'ensemble donné ne forment donc pas une base.

d) On peut vérifier que les trois vecteurs sont linéairement indépendnant. L'espace vectoriel est de dimension 3. Toutes les bases doivent avoir 3 vecteurs, alors l'ensemble donné ne forment donc pas une base.

Question 4

Si un ensemble de n est linéairement indépendant dans un espace vectoriel de dimension d, alors $n \leq d$. Supposons que l'ensemble de vecteur n'engendre pas l'espace vectoriel. Dans ce cas, il faudrait que $n < d$, ce qui est une contradiction avec $n \leq d$. L'ensemble est donc nécessairement générateur. Comme l'ensemble est linéairement indépendant et générateur, c'est une base de l'espace vectoriel.