Produit vectoriel

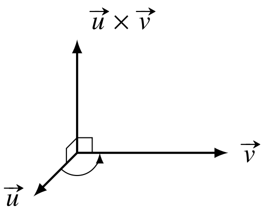
Rappels

Définition. Le **produit vectoriel** $\vec{u} \times \vec{v}$ de deux vecteurs $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ et $\vec{v} = (v_1, v_2 v_3)$ est défini par

$$\vec{u} \times \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} u_1 \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \vec{i} - u_2 \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \vec{j} + u_3 \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Le produit vectoriel $\vec{u} \times \vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

L'orientation du produit vectoriel respecte la *règle de la main droite* :



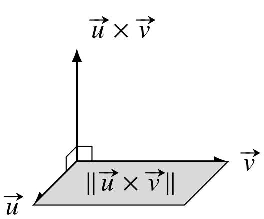
Proposition. Le produit vectoriel a les propriétés suivantes

(PV1) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ (anticommutativité)
(PV2) $(k\vec{u}) \times \vec{v} = k(\vec{u} \times \vec{v})$
(PV3) $(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \times \vec{v} = \vec{u}_1 \times \vec{v} + \vec{u}_2 \times \vec{v}$
(PV4) $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$
(PV5) $\vec{u} \perp \vec{u} \times \vec{u}$ et $\vec{v} \perp \vec{u} \times \vec{u}$

Théorème. Si θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\theta).$$

$\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ = Aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Proposition. Si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont perpendiculaires, alors $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

Proposition. Si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont normés et perpendiculaires, alors $\vec{u} \times \vec{v}$ est aussi normé.

Définition. Le **produit mixte** de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}).$$

Proposition. Le produit mixte est le déterminant suivant

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Exercices supplémentaires

Question 1
Calculer les produits vectoriels suivants.

a) $(0,0,1) \times (2,0,0)$
b) $(2,0,0) \times (0,0,1)$
c) $(1,2,3) \times (-3,-2,-1)$
d) $(3,2,5) \times (2,-1,3)$
e) $(1,0,1) \times (0,1,0)$
f) $(3,1,2) \times (-2,1,3)$
g) $\vec{i} \times \vec{j}$
h) $\vec{k} \times \vec{j}$

Question 2
Est-ce que le produit vectoriel est associatif, c'est à dire est que

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})?$$

Trouver un exemple montrant que ce n'est pas le cas en utilisant les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

Question 3
Démontrer que si $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont perpendiculaires, alors

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

Question 4
Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$, que peut-on conclure ?

Question 5
Trouver deux vecteurs unitaires et perpendiculaires aux vecteurs $\vec{u} = (0,1,1)$ et $\vec{v} = (0,1,-1)$.

Solutions

Question 1

a) $(0{,}2{,}0)$

b) $(0,-2{,}0)$

c) $(4,-8{,}4)$

d) $(11{,}1,-7)$

e) $(-1{,}0{,}1)$

f) $\vec{k}$

g) $-\vec{i}$

Question 2

Par exemple, on a que

$$(\vec{i}\times\vec{i})\times\vec{j} = \vec{0}\times\vec{k} = \vec{0},$$

mais aussi que

$$\vec{i}\times(\vec{i}\times\vec{j}) = \vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}.$$

Question 3

Si $\vec{u}\perp\vec{v}$, l'angle θ entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\pi/2$. Dans ce cas,

$$\begin{aligned}\|\vec{u}\times\vec{v}\| &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\pi/2)\\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.\end{aligned}$$

Question 4

Si le produit vectoriel de deux vecteurs est le vecteur nul, l'aire du parallélogramme engendré par les deux vecteurs est nulle. Les vecteurs sont donc parallèles.

On peut aussi conclure que les vecteurs sont parallèles de la manière suivante.

$$\begin{gathered}\vec{u}\times\vec{v} = \vec{0}\\ \|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{0}\| = 0\\ \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin(\theta) = 0\\ \sin(\theta) = 0\\ \theta = 0 \text{ ou } \pi\end{gathered}$$

ce qui implique que les vecteurs sont parallèles.

Question 5

On commence par trouver un vecteur perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\begin{aligned}\vec{u}\times\vec{v} &= (0{,}1{,}1)\times(0{,}1,-1)\\ &= (-2{,}0{,}0)\end{aligned}$$

Ce vecteur est perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ car il est leur produit vectoriel, mais il n'est pas nécessairement unitaire. On le normalise :

$$\begin{aligned}\frac{\vec{u}\times\vec{w}}{\|\vec{u}\times\vec{w}\|} &= \frac{(-2{,}0{,}0)}{\|(-2{,}0{,}0)\|}\\ &= \frac{(-2{,}0{,}0)}{2}\\ &= (-1{,}0{,}0)\end{aligned}$$

L'autre vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est

$$-(-1{,}0{,}0) = (1{,}0{,}0).$$