Produits scalaires, longueurs et angles

Rappels

Définition. Le **produit scalaire** $\vec{u} \cdot \vec{v}$ des vecteurs $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, \ldots v_n)$ est défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} u_k v_k = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Exemple 1. Le produit scalaire de $(3,1,2)$ et $(-2,3,1)$ est

$$(3,1,2) \cdot (-2,3,1) = (3)(-2) + (1)(3) + (2)(1) = -1.$$

Proposition. Si θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta).$$

Corollaire. On peut calculer l'angle entre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de la manière suivante :

$$\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)$$

Proposition. Le produit scalaire a les propriétés suivantes :

(PS1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
(PS2) $(k\vec{u}) \cdot \vec{u} = k(\vec{u} \cdot \vec{v})$
(PS3) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

Définition. On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **perpendiculaires** ou **orthogonaux** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. On écrit alors $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Définition. On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **parallèles** s'il existe un scalaire k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$. On écrit alors $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

Définition. La **norme** (ou la longueur) d'un vecteur $\vec{u}$ est $\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Définition. Une **base orthonormale** est une base $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ telle que

(1) tous les vecteurs $\vec{u}_k$ sont normés, c'est à dire que $\|\vec{u}_k\| = 1$ pour tout $1 \leq k \leq n$;
(2) les vecteurs $\vec{u}_k$ sont perpendiculaires deux à deux, c'est à dire que si $i \neq k$, alors $\vec{u}_i \perp \vec{u}_j$.

Exercices supplémentaires

Question 1
Évaluer les expressions suivantes, si possible.

a) $(1,2) \cdot (3,-1)$
b) $(1,2,3) \cdot (3,2,-1)$
c) $(1,2,3,4) \cdot (3,-1,-1,1)$
d) $(1,2,3,4,5) \cdot (1,1,1,1,1)$
e) $5 \cdot (3,-2,1)$
f) $2 + (1,2,3) \cdot (3,2,-1)$
g) $(1,2,3) \cdot ((3,2,-1) + 2)$
h) $(1,2,3) \cdot (3,2,-1)$

Question 2
Déterminer si les vecteurs suivants sont parallèles.

a) $(-2,3,1)$ et $(4,-6,1)$.
b) $(2,3)$ et $(-3,2)$.
c) $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.
d) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ et $\left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$.
e) $\left(-2\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ et $\left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$.
f) $\left(\frac{9}{2}, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ et $\left(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$.

Question 3
Déterminer si les points suivants sont colinéaires.

a) $A = (1,2)$, $B = (3,-1)$ et $C = (2,3)$.
b) $A = (1,2,3)$, $B = (4,5,6)$ et $C = (7,8,9)$.
c) $A = (1,2,3)$, $B = (4,5,6)$ et $C = (7,8,9)$.
d) $A = (1,2,3)$, $B = (4,5,6)$ et $C = (7,8,9)$.
e) $A = (1,2,3)$, $B = (4,5,6)$ et $C = (7,8,9)$.

Question 4
Pour chacun des vecteurs $\vec{u}$ suivants, trouver $\vec{u}_\perp$.

a) $\vec{u} = (3,-2)$
b) $\vec{u} = (-1,5)$
c) $\vec{u} = (-1,-1)$
d) $\vec{u} = (5,0)$
e) $\vec{u} = (-4,0)$
f) $\vec{u} = (0,-3)$
g) $\vec{u} = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{3}\right)$

Question 5
Déterminer si les vecteurs suivants sont orthogonaux.

a) $(1,2,3)$ et $(-3,0,1)$.
b) $(1,2,3)$ et $(-2,3,1)$.
c) $(1,3)$ et $(-2,2)$.
d) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{5}\right)$ et $\left(\frac{2}{5}, 3\right)$.

Question 6
Déterminer l'angle entre les vecteurs suivants.

a) $(3,0,2)$ et $(-2,0,3)$.
b) $(2,-1)$ et $(1,2)$.
c) $(2,2)$ et $(0,2)$.
d) $(1,0,1)$ et $(0,1,1)$.
e) $(1,1,-1)$ et $(-1,-1,1)$.

Question 7
Identifier quelles sont les propriété (PS1), (PS2) ou (PS3) qui sont utilisés dans chacune des égalités suivantes.

a) $(3(1,2,3))) \cdot (4,5,6) = 3((1,2,3)) \cdot (4,5,6))$
b) $((1,2,3) + (4,5,6)) \cdot (7,8,9) = (1,2,3) \cdot (7,8,9) + (4,5,6) \cdot (7,8,9)$
c)
$$\begin{aligned}
&((1,2) + (3,4)) \cdot ((1,1) + (2,2)) \\
&= (1,2) \cdot ((1,1) + (2,2)) + (3,4) \cdot ((1,1) + (2,2)) \\
&= ((1,1) + (2,2)) \cdot (1,2) + ((1,1) + (2,2)) \cdot (3,4) \\
&= (1,1) \cdot (1,2) + (2,2) \cdot (1,2) + (1,1) \cdot (3,4) + (2,2) \cdot (3,4)
\end{aligned}$$

Question 8

Utiliser (PS1), (PS2) et (PS3) et la définition de $\vec{u}$ pour démontrer que $\|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|$. Identifier les propriétés utilisés à chacune des égalités.

Question 9

Vérifier que les vecteurs $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\sqrt{\sqrt{2}2}\right)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \sqrt{\sqrt{2}2}\right)$ et $\vec{w} = (0,1,0)$ forment une base orthonormale.

Question 10

Démontrer que la formule $\theta = \arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right)$ donnant l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ donne le même angle si on inverse l'ordre des deux vecteurs. Laquelle des propriétés (PS1), (PS2) ou (PS3) est nécessaire pour que l'angle ne dépendent pas le l'ordre des vecteurs ?

Question 11

Est-ce que le produit scalaire $a \cdot b$ est défini si a et b sont des scalaire ? Dans ce cas, pourquoi les propriétés (PS1), (PS2) et (PS3) sont vraies ?

Solutions

Question 1

a) 1
b) 4
c) 2
d) 15
e) Impossible.
f) 6
g) Impossible.
h) Impossible.

Question 2

a) $(-2,3,1) \nparallel (4,-6,-2)$ car il n'y a pas de scalaire k tel que $k(-2,3,1) = (4,-6,2)$.

En effet, si un tel k existe, on devrait avoir que (1re composante) $-2k = 4$, donc que $k = -2$. Or, il faut aussi (3e composante) que $k = 2$, ce qui est impossible.

b) $(2,3) \nparallel (-3,2)$

c) $\left(\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \parallel \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

d) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right) \nparallel \left(-\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$

e) $\left(-2\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \parallel \left(-\frac{4}{3}\sqrt{3}, \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ (avec $k = 3/2$)

f) $\left(\frac{9}{2}, -3, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right) \parallel \left(\frac{6}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{2}{5}\right)$

Question 3

a) $\overrightarrow{AB} = (3,-1) - (1,2) = (2,-3)$
$\overrightarrow{AB} = (2,3) - (1,2) = (1,1)$
Il n'y a pas de k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ et donc $\overrightarrow{AB} \nparallel \overrightarrow{AC}$, ce qui implique de A,B et C ne sont pas colinéaires.

b) Non, car il n'y a pas de k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.

c) Non, car il n'y a pas de k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.

d) Non, car il n'y a pas de k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.

e) Non, car il n'y a pas de k tel que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{BC}$.

Question 4

a) $\vec{u}_\perp = (2,3)$
b) $\vec{u}_\perp = (-5,-1)$
c) $\vec{u}_\perp = (1,-1)$
d) $\vec{u}_\perp = (0,5)$
e) $\vec{u}_\perp = (0,-4)$
f) $\vec{u}_\perp = (3,0)$
g) $\vec{u}_\perp = \left(\sqrt{3}, \sqrt{2}\right)$

Question 5

a) $(1,2,3) \perp (-3,0,1)$ car $(1,2,3)\cdot(-3,0,1) = 0$.

b) $(1,2,3) \not\perp (-2,3,1)$ car $(1,2,3)\cdot(-2,3,1) = 7 \neq 0$.

c) $(1,3) \not\perp (-2,2)$ car $(1,3)\cdot(-2,2) = 4 \neq 0$.

d) $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{5}\right) \perp \left(\frac{2}{5}, 3\right)$ car $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{5}\right) \perp \left(\frac{2}{5}, 3\right) = 0$.

Question 6

a) $\theta = \frac{\pi}{2}$
b) $\theta = \frac{\pi}{2}$
c) $\theta = \frac{\pi}{4}$
d) $\theta = \frac{\pi}{3}$
e) $\theta = \pi$

Question 7

a) (PS2)
b) (PS3)
c) Dans l'ordre : (PS3),(PS1) et (PS3)

Question 8

$$
\begin{aligned}
\|k\vec{u}\| &\overset{\text{def}}{=} \sqrt{(k\vec{u})\cdot(k\vec{u})} \\
&\overset{\text{PS2}}{=} \sqrt{k(\vec{u}\cdot(k\vec{u}))} \\
&\overset{\text{PS1}}{=} \sqrt{k((k\vec{u})\cdot\vec{u})} \\
&\overset{\text{PS2}}{=} \sqrt{k^2(\vec{u}\cdot\vec{u})} \\
&= \sqrt{k^2}\sqrt{(\vec{u}\cdot\vec{u})} \\
&= |k|\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \\
&\overset{\text{def}}{=} |k|\|\vec{u}\|
\end{aligned}
$$

Question 9

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\| &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

$\|\vec{w}\| = \sqrt{0^2 + 1^1 + 0^2} = 1.$

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{2} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{u}\cdot\vec{w} &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot(0,1,0) \\
&= 0 + 0 + 0 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On montre que $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$ de la même manière que $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$.

Question 10

$$
\begin{aligned}
\arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) &\overset{\text{PS1}}{=} \arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) \\
&= \arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{\|\vec{v}\|\|\vec{u}\|}\right)
\end{aligned}
$$

La propriété (PS1) est nécessaire. La 2e égalité est la commutativité des nombres réels.

Question 11

Le produit scalaire de deux scalaie est défini car on peut considérer un scalaire comme un vecteur de dimention 1. Dans ce cas, les propriétés (PS1), (PS2) et (PS3) se réduisent à des propriétés des opérations sur les nombres réels.