Formatif 1

Algèbre linéaire et géométrie vectorielle– Hiver 2025– Yannick Delbecque

ceci est un examen préparatoire à l'examen 1 : gardez en tête que l'usage de la calculatrice et de notes est interdit lors des examens.

Question 1
Soit $\vec{u} = (2,1,-1)$, $\vec{v} = (0,1,2)$ et $\vec{w} = (3,-1,0)$. Effectuer les calcul suivants si possible ; indiquer pourquoi un calcul est impossible si c'est le cas.

a) Angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$

c) $\|\vec{u}\|$

d) $|\vec{u}\| - \vec{v} \wedge \vec{w}$

e) $\|\vec{u}\| - \vec{v} \cdot \vec{w}$

f) $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$

g) $\mathrm{proj}\,(\vec{u}, \vec{v})$

h) $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,(\vec{v} + \vec{w})$

Question 2
Trouver les composantes du vecteur $(1,1,1)$ dans la base

$$\mathcal{B} = \langle (-1,0,1), (2,1,0), (0,1,1) \rangle.$$

Question 3
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques. Démontrer en utilisant la relation entre l'angle entre les vecteurs et le produit scalaire que si l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est θ, alors l'angle entre $-\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\pi - \theta$. (Indice : partir de $(-\vec{u}) \cdot \vec{v}$ et utiliser l'identité $-\cos(\theta) = \cos(\pi - \theta)$)

Question 4
Soit $A = (2,3,1)$, $B = (-1,1,1)$ et $C = (1,0,2)$ trois point de $\mathbb{R}^3$. Trouver les coordonnées du point D sur la droite AB tel que $\overrightarrow{CD}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{AB}$.

Question 5
Déterminer si les points $A = (1,2,2)$, $B = (0,1,2)$, $C = (-1,0,1)$ et $D = (2,1,1)$ sont coplanaires…

a) en utilisant un déterminant ;

b) sans utiliser de déterminant !

Question 6
Démontrer en utilisant les propriétés des déterminants que si $\vec{w}$ est une combinaison linéaire $a\vec{u} + b\vec{v}$ de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans $\mathbb{R}^3$, alors $\Delta\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$

Question 7
Calculer le volume d'un prisme hexagonal de hauteur 2 dont les coordonnées des sommets de la base sont

$$A(2,0,0) \quad B(1,1,0) \quad C(-1,1,0)$$
$$D(-2,0,0) \quad E(-1,-1,0) \quad G(1,-1,0).$$

Question 8
Soit $\vec{u} = (3,1)$ et $\vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

a) Trouver $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} - t\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{v}$.

b) Calculer la longueur de la projection orthogonale de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$. Comparez avec le résultat obtenu en a) et expliquer la « coïncidence ».

Question 9
Soit $\vec{u} = (2,2,1)$ et $\vec{v} = (1,0,1)$. Trouver une base orthonormée $\langle \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z} \rangle$ telle que $\vec{X}$ soit dans la même direction que $\vec{u}$ et $\vec{Y}$ est orthogonal à $\vec{v}$.

Solutions

Question 1

a) $\arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{5}}\right)$
b) 13
c) $\sqrt{6}$
d) Non défini
e) $\sqrt{6}+1$
f) 13
g) $(0,-1/5,-2/5)$
h) $(-3,0,-2)$

Question 2

On cherche x,y et z tels que

$$(1,1,1) = x(-1,0,1)+y(2,1,0)+z(0,1,1).$$

Si on sépare les composantes, cette équation vectorielle devient

$$\begin{cases} -x+2y=1 \\ y+z=1 \\ x+z=1 \end{cases}$$

En résolvant ce système d'équation on trouve la solution $x=1$, $y=1$ et $z=0$, d'où

$$(1,1,1) = (1,1,0)_{\mathcal{B}}.$$

Question 3

La relation entre l'angle et le produit scalaire est

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta).$$

On a donc

$$\begin{aligned}(-\vec{u})\cdot\vec{v} &= -(\vec{u}\cdot\vec{v}) \\ &= -\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\theta) \\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|-\cos(\theta) \\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\pi-\theta).\end{aligned}$$

Comme on vient de montrer que

$$(-\vec{u})\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\pi-\theta)$$

l'angle entre $-\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\pi-\theta$.

Question 4

En projetant $\overrightarrow{AC}$ sur $\overrightarrow{AB}$, on trouve que $\overrightarrow{AD} = \left(-\frac{27}{13},-\frac{18}{13},0\right)$. On trouve le point D à partir des coordonnés du point A : $\left(-\frac{1}{13},\frac{21}{13},1\right)$.

Question 5

a) $\Delta(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Comme les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont linéairement indépendants, les points A, B, C et C ne sont pas coplanaires.

b) On montre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont linéairement indépendants. Si on a une combinaison linéaire

$$x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}+z\overrightarrow{AD} = \vec{0}$$

les composantes x, y et z doivent être solution du système d'équation

$$\begin{cases} -x-2y+z=0 \\ -x-2y-z=0 \\ \quad -y-z=0 \end{cases}$$

En résolvant, on trouve que la seule solution est $x,y,z=0$.

Question 6

On a par hypothèse que $\vec{w} = a\vec{u}+b\vec{v}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\Delta\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle &= \Delta\langle\vec{u},\vec{v},a\vec{u}+b\vec{v}\rangle \\ &= \Delta\langle\vec{u},\vec{v},a\vec{u}\rangle+\Delta\langle\vec{u},\vec{v},b\vec{v}\rangle \\ &= a\Delta\langle\vec{u},\vec{v},\vec{u}\rangle+b\Delta\langle\vec{u},\vec{v},\vec{v}\rangle \\ &= a0+b0=0.\end{aligned}$$

Note : on pourrait bien sur écrire cette solution en utilisant l'autre notation pour les déterminants.

Question 7

Si on connait l'aire de la base, on peut trouver le volume en la multipliant par la hauteur.

La base est un hexagone. On peut calculer l'aire A de cet hexagone de plusieurs manières, la plus efficace est de considérer ces points comme des points de $\mathbb{R}^2$ (toutes les cotes sont nulles) et de prendre le déterminant (voir exercice 4 p. 101) :

$$\begin{aligned}A &= \Delta(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE}) \\ &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-3)(-1)-(1)(-3) \\ &= 6\end{aligned}$$

La surface de la base est $A=6$, donc le volume est 12.

Question 8

a) On veut t tel que

$$(\vec{u}-t\vec{v})\cdot\vec{v} = 0.$$

$$\begin{aligned}(\vec{u}-t\vec{v})\cdot\vec{v} &= 0 \\ \left((3,1)-t\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}}\right)\cdot\frac{(1,-1)}{\sqrt{2}} &= 0 \\ \left(3-\frac{t}{\sqrt{2}},1+\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) &= 0 \\ \left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{t}{2}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{t}{2}\right) &= 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}}-t &= 0 \\ t = \frac{2}{\sqrt{2}} &= \sqrt{2}.\end{aligned}$$

b) La longueur de la projection est

$$\begin{aligned}\|\text{proj}(\vec{u},\vec{v})\| &= \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \\ &= \frac{(3,1)\cdot\left((1,-1)/\sqrt{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2}} \\ &= \frac{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

Question 9

On prend $\vec{X} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ afin d'avoir un premier vecteur unitaire dans la même direction que $\vec{u}$. Comme $\vec{Y}$ doit être orthogonal à $\vec{X}$ et à $\vec{v}$, on prend $\vec{Y} = \frac{\vec{u}\wedge\vec{v}}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$ car $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{X}$ (qui est paralèlle à $\vec{u}$) et à $\vec{v}$.

Enfin, Comme $\vec{Z}$ doit être perpendiculaire à $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, on prend $\frac{\vec{X}\wedge\vec{Y}}{\|\vec{X}\wedge\vec{Y}\|}$.

En calculant, on trouve

$$\begin{aligned}\vec{X} &= \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right) \\ \vec{Y} &= \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right) \\ \vec{Z} &= \left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\end{aligned}$$