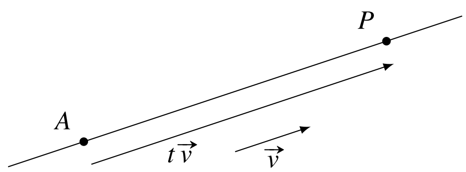
Droites

Définition. L'**équation vectorielle** de la droite parallèle au vecteur $\vec{v}$, appelé le **vecteur directeur** de la droite, et passant par le point A est

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}.$$



Dans $\mathbb{R}^2$: $(x,y) = (x_0,y_0) + t(a,b)$ et l'**équation paramétrique** de cette droite est

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = b_0 + bt. \end{cases}$$

L'**équation symétrique** de la droite est

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$$

Dans $\mathbb{R}^3$: $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$ et l'**équation paramétrique** de cette droite est

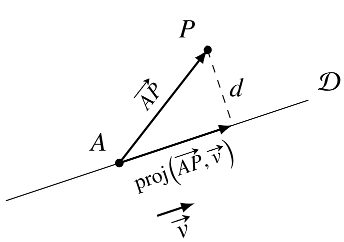
$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

L'**équation symétrique** de la droite est

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

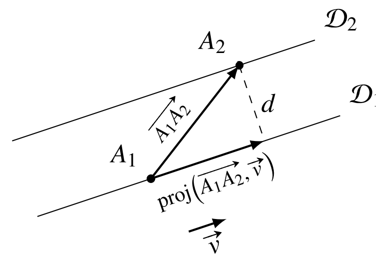
Définition. La distance d entre le point P et la droite $\mathcal{D}$ est

$$d = \left\| \overrightarrow{AP} - \operatorname{proj}\left(\overrightarrow{AP}, \vec{v}\right) \right\|.$$



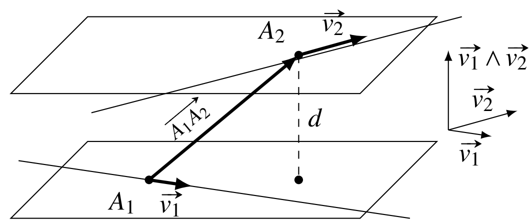
Définition. La distance d entre la droite $\mathcal{D}_1$ et la droite $\mathcal{D}_2$ est

$$d = \left\| \overrightarrow{A_1A_2} - \operatorname{proj}\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v}\right) \right\|.$$



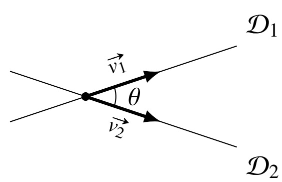
Définition. La distance entre deux droites gauches dans $\mathbb{R}^3$:

$$d = \left\| \operatorname{proj}\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{v_1} \wedge \vec{v_2}\right) \right\| = \frac{\left| \overrightarrow{A_1A_2} \cdot (\vec{v_1} \times \vec{v_2}) \right|}{\|\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}\|}.$$



Définition. L'**angle** entre deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est l'angle formé par leur vecteurs directeurs ou leur inverses. L'angle est toujours entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

$$\theta = \arccos\left(\frac{|\vec{v_1} \cdot \vec{v_2}|}{\|\vec{v_1}\|\|\vec{v_2}\|} \right)$$



Position relative de deux droites dans $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{D}_1 : \overrightarrow{OA_1} + t\vec{v}_1 t$ et $\mathcal{D}_2 : \overrightarrow{OA_2} + t\vec{v}_2 t$.

	$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$	$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$
$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$	Parallèles	Impossible
$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$	Confondues	Sécantes

Position relative de deux droites dans $\mathbb{R}^3$

$\mathcal{D}_1 : \overrightarrow{OA_1} + t\vec{v}_1 t$ et $\mathcal{D}_2 : \overrightarrow{OA_2} + t\vec{v}_2 t$.

	$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$	$\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$
$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$	Parallèles	Gauches
$\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \neq \emptyset$	Confondues	Sécantes

Exercices supplémentaires

Question 1
Trouver l'équation paramétrique de la droite donnée.

a) Droite parallèle à $(2,-3)$ et passant par le point $(-2,1)$.

b) Droite parallèle à $(0,2)$ et passant par le point $(2,0)$.

c) Droite parallèle à $(-3,\frac{1}{2})$ et passant par le point $\left(\sqrt{2},\frac{\pi}{3}\right)$.

d) Droite parallèle à $(1,2,3)$ et passant par le point $(3,2,1)$.

e) Droite parallèle à $(-1,0,1)$ et passant par le point $(0,1,2)$.

f) L'axe des y dans $\mathbb{R}^2$.

g) L'axe des y dans $\mathbb{R}^3$.

h) La droite $y = x$ dans $\mathbb{R}^2$.

i) La droite $y = x$ dans le plan xy dans $\mathbb{R}^3$.

Question 2
Donner l'équation symétrique de la droite donnée.

a) Droite parallèle au vecteur $(1,2,-3)$ et passant par $(2,0,-1)$.

b) Droite parallèle au vecteur $(2,-1,0)$ et passant par $(-1,0,1)$.

Question 3
Calculer les distances distances demandés.

a) Distance entre le point $(3,4)$ et droite d'équation paramétrique $\begin{cases} x = 1+2y \\ y = 2-t \end{cases}$.

b) Le point $(1,-1,1)$ et la droite droite d'équation $(x,y,z) = (1,1,-1)+t(1,0,-1)$.

c) Le point $(1,2)$ et l'axe des y

d) Le point $(2,3,4)$ et l'axe des x

e) Les droites d'équation $(x,y) = (2,1)+t(3,1)$ et $\frac{x-4}{7} = \frac{y+5}{13}$.

f) Les droites d'équation $\begin{cases} x = 2-2t \\ y = -1-t \\ z = 1+t \end{cases}$ et $\frac{x-1}{7} = \frac{y-2}{13} = \frac{z-2}{17}$.

g) Les droites gauches $\begin{cases} x = 2+t \\ y = 1+2t \\ z = 3+t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 3-t \\ y = 1+2t \\ z = 1+t \end{cases}$

Question 4
Calculer l'angle entre les deux droites données.

a) $(x,y) = (1,2)+t(3,4)$ et $(3,4)+t(1,-1)$

b) $\begin{cases} x = 1+t \\ y = -2-t \end{cases}$ et l'axe des x.

c) $(x,y,z) = (1,2,3)+t(2,2,2)$ et $(4,5,6)+s(-1,2,-1)$

d) $(x,y,z) = (4,-5)+t(1/2,2)$ et $(3,11)+s(4,1)$

Question 5
Déterminer la position relative des deux droites. Si elles sont sécantes, déterminer le point d'intersection.

a) Les droites $(x,y) = (1,2)+(3,4)t$ et $(x,y) = (3,4)+(1,2)s$.

b) Les droites $(x,y) = (2,1)+(1,-2)t$ et $(x,y) = (3,4)+(-2,4)s$.

c) Les droites $(x,y,z) = (1,2,3)+(2,1,-1)t$ et $(x,y,z) = (3,2,1)+(1,-1,2)s$

Solutions

Question 1

a) $\begin{cases} x = -2+2t \\ y = 1-3t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2t \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = \sqrt{2}-3t \\ y = \frac{\pi}{3}+\frac{t}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} x = 3+x \\ y = 2+2t \\ z = 1+3t \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = -x \\ y = 1 \\ z = 2+t \end{cases}$

f) $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases}$

g) $\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases}$

i) $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$

Question 2

a) $x-2 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-3}$

b) $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1}$

Question 3

a) $A = (1,2)$, $\vec{v} = (2,-1)$, $P = (3,4)$, $\overrightarrow{AP} = (2,2)$.

$$\begin{aligned} d &= \|\overrightarrow{AP} - \operatorname{proj}(\overrightarrow{AP},\vec{v})\| \\ &= \|(2,2) - \operatorname{proj}((2,2),(2,-1)\| \\ &= \left\|(2,2) - \frac{(2,2)\cdot(2,-1)}{(2,2)\cdot(2,2)}(2,2)\right\| \\ &= \left\|(2,2) - \frac{6}{8}(2,2)\right\| \\ &= \left\|(2,2) - \left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)\right\| \\ &= \left\|\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\| \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(= \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

b) $d = \sqrt{6}$

c) $d = 2$

d) $d = 5$

e) $d = 2\sqrt{10}$

f) $d = \sqrt{11}$

g) $d = 6$

Question 4

a) $\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)$

b) $$\begin{aligned} \theta &= \arccos\left(\frac{|(1,-1)\cdot(1,0)|}{\|(1,-1)\|\|(1,0)\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}(1)}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

c) $\theta = \frac{\pi}{2}$

d) $\theta = \arccos\left(\frac{8}{17}\right)$

Question 5

a) Droites non parallèles car $(3,4) \nparallel (1,2)$. Intersection ? $(1,2)+(3,4)t = (3,4)+(1,2)s$ $\begin{cases} 1+3t = 3+s \\ 2+4t = 4+2s \end{cases}$ Solution : $t = 1$ et $s = 1$, ce qui correspond au point d'intersection $(x,y) = (1,2)+(3,4)(t) = (4,6)$

b) Droites parallèles car $(1,-2) \parallel (-2,4)$. Intersection ? $(2,1)+(1,-2)t = (3,4)+(-2,4)s$ $\begin{cases} 2+t = 3-2s \\ 1-2t = 4+4s \end{cases}$ Pas de solution, donc pas de point d'intersection. Droites parallèles.

c) Droites non parallèles car $(2,1,-1) \nparallel (1,-1,2)$. Intersection ? $(1,2,3)+(2,1,-1)t = (3,2,1)+(1,-1,2)s$ n'a pas de solution, il n'y a pas de point commun entre les droits. Elles sont dont gauche.