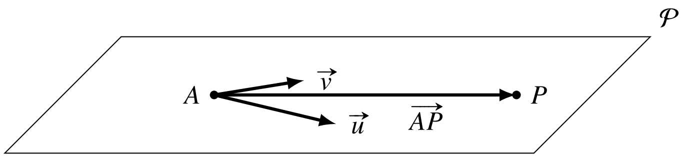
Plans

Définition. L'**équation vectorielle** du plan parallèle aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, appelés les **vecteurs directeurs** du plan, et passant par le point A est

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + s\vec{u} + t\vec{v}.$$

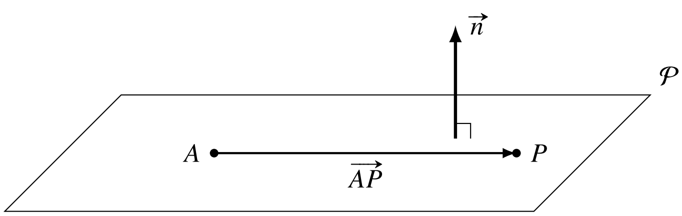


L'équation a la forme $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + s(u_1,u_2,u_3) + t(v_1,v_2,v_3)$ et est appelée l'**équation paramétrique** du plan. En séparant cette équation par composant, elle s'exprime sous la forme

$$\begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1 \\ y = y_0 + su_2 + tv_2 \\ z = z_0 + su_3 + tv_3. \end{cases}$$

Définition. L'**équation normale** du plan perpendiculaire au vecteur $\vec{n} = (a,b,c)$ est

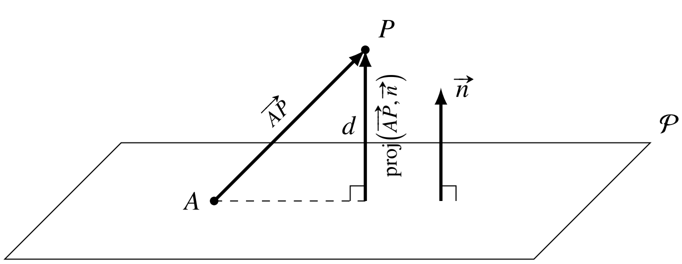
$$\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0.$$



$$ax + by + cz = d.$$

Définition. La distance d entre le point P et le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à $\vec{n}$ est

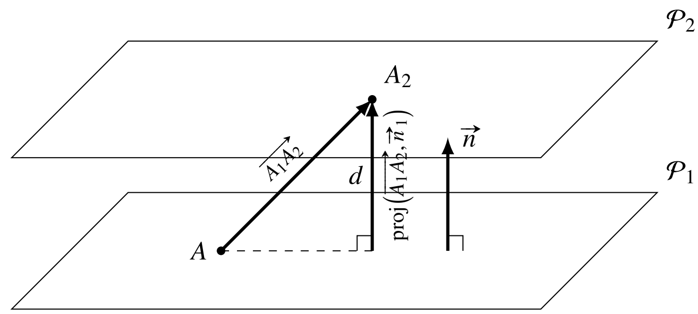
$$d = \left\| \operatorname{proj}\left(\overrightarrow{AP}, \vec{n}\right) \right\|.$$



Définition. La distance d entre deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est

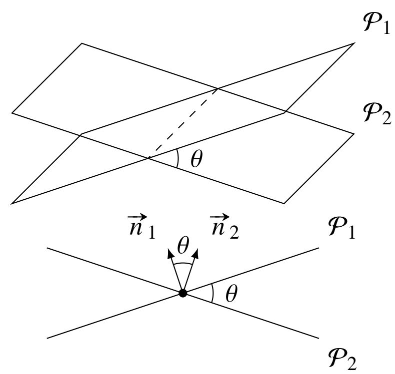
$$d = \left\| \operatorname{proj}\left(\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{n}\right) \right\| = \frac{|\overrightarrow{A_1A_2}, \vec{n}|}{\|\vec{n}\|},$$

où $\vec{n} = \vec{n}_1$ ou $\vec{n}_2$.



Définition. L'**angle** entre deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est l'angle formé par les vecteurs normaux à ces deux plans ou leurs inverses. L'angle est toujours entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

$$\theta = \arccos\left(\frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\|\vec{n_2}\|}\right)$$



Définition. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont parallèles.

Proposition. L'intersection de deux plans non parallèles est une droite.

Exercices supplémentaires

Question 1

Trouver un point quelconque sur les plans suivants.

a) Le plan d'équation normale $x + 2y + 3z = 4$.

b) Le plan d'équation normale $y = 4$.

Question 2
Trouver l'équation normale du plan donnée.

a) Plan perpendiculaire à (1,2,3) et passant par (0,1,2).
b) Plan xy dans $\mathbb{R}^3$
c) Plan yx dans $\mathbb{R}^3$
d) Plan parallèle aux vecteurs $\vec{v}_1 = (1,0,1)$ et $\vec{v}_2 = (1,2,3)$ passant par le point (2,1,3).
e) Plan passant par l'origine et perpendiculaire à la droite d'équation $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+3t \\ z = 3+4t \end{cases}$.

Question 3
Calculer la distance entre...

a) le point (3,2,1) et le plan normal à (1,2,2) passant par (0,1,2) ;
b) le point (−1,0,1) et le plan normal à (1,1,1) passant par (1,1,1) ;
c) le point (3,5,7) et le plan xy
d) le point (3,5,7) et le plan xz

Question 4
Calculer l'angle entre les deux plans donnés.

a) Les plans d'équations $3x-2y+2z = 3$ et $2x+2y-3z = 2$.
b) Les plans d'équations $x-y+z = 3$ et $x+y-z = 2$.
c) Les plans d'équations $x+z = 1$ et $y+z = 2$.
d) Le plan d'équation $x+y = 1$ et le plan xy.
e) Le plan d'équation $x+y = 1$ et le plan xy.

Question 5
Déterminer si les plans suiants sont parallèles ou non.

a) Le plan d'équation $x+2y-3z = 4$ et le plan d'équation $-2x+4y+6z = 8$.
b) Le plan d'équation $x+2z = 1$ et le plan d'équation $-2x-4z = 1$.
c) Le plan xz et le plan d'équation $x+y = 1$.
d) Le plan yz et le plan d'équation $z = 3$.
e) Le plan xz et le plan d'équation $y = 5$.

Question 6
Déterminer l'équation paramétrique de la droite d'intersection des plans suivants.

a) $\mathcal{P}_1 :\ 2x-y+z = 2$ et $\mathcal{P}_2 :\ x+2y+3z = 1$
b) $\mathcal{P}_1 :\ 3x-2y-z = 1$ et $\mathcal{P}_2 :\ 2x+2y+z = 2$

Solutions

Question 1

a) Si $y = 0$ et $z = 0$, on a que $x = 4$. Le point (4,0,0) est donc sur le plan donné. (Il y a une infinité de possibilités selon les valeurs données à y et z.)
b) Comme $y = 4$ est la seule contrainte, les deux autres coordonnées peuvent être choisies comme on le veut, par exemple $x = 0$ et $z = 0$. Le point (0,4,0) est donc sur le plan donnée. (Il y a une infinité de possibilités selon les valeurs données à x et y.)

Question 2

a) L'équation normale est de la fomre :
$$x+2y+3z = d.$$
On trouve la valeur de d en substituant les coordonnées du point (0,1,2) dans cette équation :
$$0(1)+2(1)+3(2) = 8 = d.$$
L'équation est donc
$$x+2y+3z = 8.$$
b) $\vec{n} = \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (-2,-2,2)$. L'équation normlal est donc de la forme
$$-2x-2y+2z = d.$$
On trouve d en utilisant le fait que le point (2,1,3) est sur le plan :
$$-2(2)-2(1)+2(3) = d,$$
donc $d = 0$ et l'équation normale du plan est
$$-2x-2y+2z = 0.$$
c) Un vecteur directeur de la droite donnée est $\vec{v} = (2,3,4)$. Comme le plan est perpendiculaire cette droite, le vecteur $\vec{v}$ est normal au plan. L'équation normale du plan est donc de la forme
$$2x+3y+4z = d.$$
Comme le plan passe par (0,0,0), on doit avoir que
$$2(0)+3(0)+4(0) = d,$$
donc que $d = 0$. L'équation cherchée est donc
$$2x+3y+4z = 0.$$

Question 3

a)
$$\begin{aligned} d &= \|\mathrm{proj}(\overrightarrow{AP},\vec{n})\| \\ &= \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \\ &= \frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} \\ &= \frac{|(3,1,-1)\cdot(1,2,2)|}{\|(1,2,2)\|} \\ &= \frac{|3+2-2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} \\ &= \frac{3}{3} \\ &= 1 \end{aligned}$$
b) $d = \sqrt{3}$
c) $d = 7$ (prendre $A = (0,0,0)$ et $n = (0,0,1)$)
d) $d = 5$ (prendre $A = (0,0,0)$ et $n = (0,1,0)$)

Question 4

a)
$$\begin{aligned} \theta &= \arccos\left(\frac{|(3,-2,2)\cdot(2,2,-3)|}{\|(3,-2,2)\|\|(2,2,-3)\|}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{|-4|}{\sqrt{17}\sqrt{17}}\right) \\ &= \arccos\left(\frac{4}{17}\right) \end{aligned}$$
b) $\theta = \arccos\left(\frac{1}{3}\right)$
c) $\theta = \frac{\pi}{3}$
d) $\theta = \frac{\pi}{2}$
e) $\theta = \frac{\pi}{2}$

Question 5

a) Deux plans sont parallèles ssi leur vecteurs normaux sont parallèles. Les vecteurs normaux des deux plans sont $\vec{n}_1 = (1,2,-3)$ et $\vec{n}_2 = (-2,4,6)$. On a que $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$ car il n'y a pas de scalaire k tel que $\vec{n_1} = k\vec{n}_2$. Les plans ne sont donc pas parallèles.
b) Plan parallèles car $\vec{n}_1 = (1,0,2)$ est parallèle à $\vec{n}_2 = (-2,0,-4)$.
c) Plan xz : $\vec{n}_1 = (0,1,0)$
Plan $x+y = 1$: $\vec{n}_2 = (1,1,0)$.
Comme $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, les plans ne sont pas parallèles.
d) Plan yz : $\vec{n}_1 = (1,0,0)$
Plan $z = 3$: $\vec{n}_2 = (0,0,1)$.
Comme $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$, les plans ne sont pas parallèles.
e) Plan xz : $\vec{n}_1 = (0,1,0)$
Plan $y = 5$: $\vec{n}_2 = (0,1,0)$.
Comme $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$, les plans sont parallèles.

Question 6

a) $\begin{cases} x = 1-t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$
b) $\begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{2}{5}-\frac{t}{3} \\ z = t \end{cases}$