Forme ERL, pivots, rang

Définition. Une matrice est sous forme **échelonnée** si le nombre de zéro devant la première valeur non-nulle d'une ligne est strictement croissant de la première à la dernière ligne.

Exemple 1. Les matrices suivantes sont échelonnées.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3&4&5&6\\0&3&4&5&6\\0&0&4&5&6\\0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&3&0&0&6\\0&0&0&5&6\\0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Exemple 2. Les matrices suivantes ne sont pas échelonnées.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0&2&1\\1&1&1\\3&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\2&3&4&5&6\\0&3&4&5&6\\0&0&4&5&6\\0&0&0&0&6\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&3&0&0&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&5&6\\0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Définition. La première entrée non-nulle d'une ligne d'une matrice échelonnée est appelée **pivot**.

Exemple 3. Les pivots des matrices échelonnées suivantes sont les entrées encerclées.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\0&0&3\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2&3&4&5&6\\0&3&4&5&6\\0&0&4&5&6\\0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}2&3&0&0&6\\0&0&0&5&6\\0&0&0&0&6\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Question 1
Encercler les pivots des matrices échelonnées suivantes.

a) $\begin{pmatrix}1&2\\0&4\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&2\\0&0\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}0&2\\0&0\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}5&2&1\\0&3&3\\0&0&1\end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix}0&2&\sqrt{2}\\0&0&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

Définition. Une matrice est sous forme **échelonnée réduite** (ERL) si est échelonnée et si chaque pivot est 1 et est la seule entrée non-nulle sur sa colonne.

Question 2
Si la matrice est ERL, encercler ses pivots. Sinon, encadrer les entrées qui ne respectent pas la définition de matrice ERL.

a) $\begin{pmatrix}1&2&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&4\\0&1&5\end{pmatrix}$

Définition. Deux matrices A et B sont **équivalentes lignes** (notation : $A \sim B$ si on peut transformer A en B à l'aide des transformations élémentaires :

1. $L_j \leftrightarrow L_j$ échanger deux lignes ;
2. $L_i \leftarrow kL_i, k \neq 0$ multiplier une ligne par une constante non-nulle ;
3. $L_i \leftarrow L_i + kL_j$ Remplacer une ligne par sa somme avec un multiple d'une autre ligne.

Théorème.

1. Toute matrice A est équivalente ligne à une matrice ERL R (en utilisant la réduction de Gauss) :
   pour toute matrice A il existe une matrice ERL R telle que $A \sim R$
2. Si deux matrices A et B sont équivalentes ligne à la même matrice ERL R, elles sont équivalentes ligne :

$$A \sim R \text{ et } B \sim R \implies A \sim B.$$

Définition. Le **rang** d'une matrice A est le nombre de pivots de sa forme ERL. On note ce nombre $\text{rang}(A)$.

Théorème. Si A est la matrice $m \times (n+1)$ associée à un système d'équation à m équations et n variables, alors la solution du système est de dimension $n - \text{rang}(A)$.

Corollaire. Le système d'équation

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = c_1 \\ \vdots \quad + \cdots + \quad \vdots \quad = \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases}$$

a une solution unique si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$ est de rang n.

Question 3
Déterminer la dimension de la solution des systèmes d'équations suivants.

a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=1 \\ z=1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=1 \\ 2y+2z=21 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=1 \\ 2y+2z=21 \end{cases}$

Exercices supplémentaires

Question 4
Faire la liste de toutes les formes de matrices 2×2 échelonnées, en indiquant $*$ pour une entrée quelconque et $\oplus$ pour un pivot.

Question 5
Faire la liste de toutes les formes de matrices 2×2 échelonnées réduites, en indiquant $*$ pour une entrée quelconque.

Question 6
Déterminer le rang des matrices suivantes.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Question 7
Vrai ou faux ?

a) Les vecteurs (a,b) et (c,d) sont linéairement indépendants si et seulement si le rang de $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est 2.

b) Le système d'équation

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3 \end{cases}$$

a une solution unique si et seulement si la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ est de rang 3.

Solutions

Question 1

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) Aucun pivot

Question 2

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 0 & 1 & \boxed{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & 5 \end{pmatrix}$

Question 3

a) Rang=3, solution de dimension $3-3=0$ (point).

b) Rang=1, solution de dimension $2-1=1$ (droite).

c) Rang=2, solution de dimension $3-2=1$ (droite).

d) Rang=2, solution de dimension $3-2=1$ (droite).

Question 4

$\begin{pmatrix} \oplus & * \\ 0 & \oplus \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \oplus & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & \oplus \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 5

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Question 6

a) rang = 1

b) rang = 2

c) rang = 2

d) rang = 1

e) rang = 3

f) rang = 2

Question 7

a) Vrai, car les vecteurs sont linéairement indépendant si
$$\{ax+cy=0bx+dy=0$$
a une solution unique, ce qui est le cas uniquement si le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ est 2.

b) Vrai