

Formatif 2

Question 1

Soit \mathcal{D} la droite d'équation

$$\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{-z}{2}.$$

- Déterminer la distance entre \mathcal{D} et le point $P = (1,2,3)$.
- Trouver le point B de \mathcal{D} qui est le plus près de l'origine.

Question 2

Soit $A = (2,1,3)$, $B = (1, -1,2)$ et $C = (0,1,2)$ trois points dans \mathbb{R}^3 .

- Donner l'équation normale du plan \mathcal{P} qui passe par A , B et C .
- Trouver l'équation paramétrique du plan perpendiculaire à \mathcal{P} qui passe par B et C .

Question 3

Soit \mathcal{D} la droite ayant comme équation vectorielle

$$(x,y,z) = (1,2,3) + t(2,0,-3)$$

et \mathcal{P} le plan d'équation

$$x+2y+z=1.$$

- Déterminer le point de croisement entre la droite \mathcal{D} et le plan \mathcal{P} .
- Trouver l'angle entre la droite \mathcal{D} et le plan \mathcal{P} .

Question 4

Soit \mathcal{D} la droite d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 3+t. \end{cases}$$

Trouver l'équation d'une droite à distance 2 de \mathcal{D} et ayant pour vecteur directeur $\vec{v} = (1,1,1)$ (ind. pensez à la distance entre deux droites gauches)

Question 5

Résoudre les systèmes d'équations suivants en déterminant les matrices ERL associées à ces systèmes. Déterminer le rang de ces systèmes et donner *toutes* leur solutions.

- $$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x-y+2z=2 \\ 3x+2y+z=3 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} 2x+y=1 \\ 3x+y=2 \\ 4x+y=3 \end{cases}$$
- $$\begin{cases} x+y+z=1 \\ 3x+2y+z=3 \end{cases}$$

Question 6

- Donner la forme échelonnée réduite (ERL) de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

en indiquant à chaque étape quelle opération élémentaire sur les lignes est effectuée.

- En considérant la matrice de la question précédente comme celle d'un système à 4 inconnues x,y,z,u , décrire l'ensemble solution sous forme paramétrique.

Question 7

Déterminer si les vecteurs $\vec{u} = (2, -2, 1)$, $\vec{v} = (3, -2, 1)$ et $\vec{w} = (-4, 2, -1)$ forment une base en résolvant un système d'équation linéaire. Résoudre le système à l'aide de matrices en le réduisant à sa forme échelonnée. Si les vecteurs ne sont pas indépendants, trouver une combinaison linéaire d'un des vecteurs en fonction des deux autres.

Question 8

Vrai ou faux ?

- Si deux matrices sont L -équivalentes, alors elles sont égales.
- Si un système d'équation est représenté par une matrice $n \times m$ de rang $n-1$, alors l'ensemble solution du système est de dimension 1.
- Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} trois vecteurs dans \mathbb{R}^3 . La matrice du système d'équation associé à l'équation vectorielle

$$x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = 0$$

est de rang 3 si et seulement si \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} sont linéairement dépendants.

Solutions

Question 1

- a) Le vecteur directeur de \mathcal{D} est $\vec{v} = (2, 1, -2)$ et la droite passe par le point $A = (1, -1, 0)$.

$$d = \|\vec{AP} - \text{proj}(\vec{AP}, \vec{v})\| = \sqrt{17}$$

(Calculs partiels : $\vec{AP} = (0, 3, 3)$,

$$\text{proj}(\vec{AP}, \vec{v}) = (-2/3, -1/3, 2/3),$$

$$\vec{AP} - \text{proj}(\vec{AP}, \vec{v}) = \vec{AP} - \text{proj}(\vec{AP}, \vec{v}) = (2/3, 10/3, 7/3).$$

- b) Le point B est

$$B = A + \text{proj}(\vec{AO}, \vec{v}) = (7/9, -10/9, 2/9).$$

Question 2

- a) On trouve une normale au plan

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC}.$$

Le point A est un point sur le plan.

On trouve l'équation normale : soit $P = (x, y, z)$ un point quelconque sur le plan. On doit avoir que

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{n} &= 0 \\ (x-2, y-1, z-3) \cdot (2, 1, -4) &= 0 \\ 2(x-2) + (y-1) - 4(z-3) &= 0 \\ 2x + y - 4z &= -7 \end{aligned}$$

L'équation normale est donc

$$2x + y - 4z = -7.$$

- b) Pour trouver l'équation paramétrique du plan cherché, on doit avoir un point sur ce plan et deux vecteurs directeurs linéairement indépendants.

Le point B est un point sur le plan.

Comme le plan passe par B et C , le vecteur \vec{BC} est un vecteur directeur. Comme le plan cherché est perpendiculaire à \mathcal{P} , le vecteur \vec{n} est aussi un vecteur directeur. On trouve donc l'équation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 1 + 2s - t \\ y = -1 + s + 2t \\ z = 2 - 4s. \end{cases}$$

Question 3

- a) Soit $(x, y, z) = (1, 2, 3) + t(2, 0, -3)$. Ce point est aussi sur le plan ssi il satisfait l'équation $x + 2y + z = 1$. On doit donc avoir que

$$(1 + 2t) + 2(2) + (3 - 3t) = 1,$$

On trouve que $t = 7$.

Le point de croisement est donc

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + (7)(2, 0, -3) = (15, 2, -18).$$

- b) Un vecteur directeur de la droite est $(2, 0, -3)$ et un vecteur normal au plan est $\vec{n} = (1, 2, 1)$.

L'angle entre la droite et le plan est

$$\pi/2 - \text{l'angle entre la droite et } \vec{n}$$

L'angle entre \vec{v} et \vec{n} est

$$\phi = \arccos\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{v}\| \|\vec{n}\|}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{6}\sqrt{13}}\right).$$

L'angle entre la droite et le plan est donc $\pi/2 - \phi$.

Question 4

La droite \mathcal{D} a comme vecteur directeur $\vec{u} = (1, -2, 1)$ et par le point $A = (1, -1, 3)$. Si on veut une droite à distance 2, on peut prendre un point de \mathcal{D} , de déplacer d'une distance 2 dans la direction d'un vecteur perpendiculaire à \vec{u} et \vec{v} , ce qui nous donne un point B à distance 2 de \mathcal{D} . La droite passant par ce point B et ayant comme vecteur directeur \vec{v} est, par construction, à distance 2.

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (-3, 0, 3).$$

$$\begin{aligned} \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} &= \frac{(-3, 0, 3)}{\sqrt{18}} \\ &= \left(\frac{-3}{\sqrt{18}}, 0, \frac{3}{\sqrt{18}}\right) \\ &= \left(\frac{-3}{3\sqrt{2}}, 0, \frac{3}{3\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$B = A + 2 \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = (-\sqrt{2} + 1, -1, \sqrt{2} + 3)$$

Question 5

- a) $x = 1, y = -1/5, z = 2/5$

- b) $x = 1, y = -1$

$$c) \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -2t \\ z = t \end{cases}$$

Question 6

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$b) \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 4 - 4t \\ z = 0 \\ u = t \end{cases}$$

Question 7

On commence par vérifier si les vecteurs sont linéairement indépendants. On utilise le théorème sur l'indépendance linéaire : on montre que si $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$, alors $x, y, z = 0$.

L'équation vectorielle $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ devient, quand on sépare les composantes, le système d'équation linéaires

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

La matrice augmentée de ce système est

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On échelonne cette matrice :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} &\xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Il y a donc plusieurs solutions. Une solution doit satisfaire les relations $y = 2z$ et $x = -z$. Par exemple $x = -1, y = 2$ et $z = 1$ est une solution possible où $x, y, z \neq 0$. Les vecteurs ne sont donc pas linéairement indépendants.

Pour trouver une combinaison linéaire, écrivons la relation vectorielle obtenue quand on utilise la solution particulière que nous venons de donner :

$$-\vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}.$$

Pour trouver une combinaison linéaire, on peut simplement isoler \vec{u} . On trouve

$$\vec{u} = 2\vec{v} + \vec{w}.$$

(On pourrait aussi isoler \vec{v} ou \vec{w} .)

Question 8

- a) Faux
b) Vrai
c) Faux