Yannick Delbecque — Département de mathématiques — Cégep de Saint-Laurent
Algèbre linéaire et géométrie vectorielle (201-NYC) — Session Hiver 2025

Formatif 3

Question 1
Vrai ou faux ?

a) Si A est une matrice $n \times n$ avec $n > 1$, alors pour tout nombre réel k
$$|kA| = k|A|.$$

b) Toute matrice peut s'écrire comme un produit de matrice élémentaires.

c) Si $|A|^2 = 1$, alors $A = I$.

d) $\begin{pmatrix} 3k & 2k & k \\ k & -k & k \\ 3k & 2k & k \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

e) La matrice zéro 0 est une matrice orthogonale.

f) Pour toute fonction linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ si on connait l'effet de T sur deux vecteurs différents, alors on peut déterminer la valeur de $T(x,y)$ pour tout vecteur (x,y).

g) $R_{\pi/7}^{14} = I$.

h) À toute transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ du plan dans le plan correspond une matrice A telle que
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

i) Si une transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est linéaire, alors $\det([T]) \neq 0$

Question 2
Laquelle des affirmations suivantes n'est pas équivalente aux autres :

(1) $\det(A) \neq 0$.
(2) Les colonnes de A ne forment pas une base.
(3) Le système d'équation ayant comme forme matricielle $AX = C$ a une solution unique.
(4) $A \sim I$
(5) Le rang de A est n.

Question 3
Soient A, B et C les matrices suivantes :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Isoler X dans les équations suivantes et déterminer sa valeur.

a) $AXB = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^\top X = BC^\top$

c) $BX = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Question 4
Soit A, B et C des matrices 3×3 telles que $\det(A) = 2$, $\det(B) = -1$ et $\det(C) = 3$. Calculer le déterminant suivant à l'aide des propriétés des déterminants.
$$\left| A^{-1} \left((2B)^2 C^\top \right)^{-1} \right|$$

Question 5
Écrire la matrice
$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$
comme un produit de matrices élémentaires et d'une matrice ERL.

Question 6
Calculer l'inverse de la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) avec la méthode de réduction de Gauss-Jordan

b) en utilisant la matrice adjointe

Question 7
Calculer le déterminant de la matrice suivante.
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Question 8
Soit le système d'équations suivant :
$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f. \end{cases}$$

a) Donner une condition sur la matrice
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
qui permet de savoir quand le système d'équations a une solution unique.

b) En supposant que le système a une solution unique, écrire le système d'équations sous forme d'une équation matricielle et résoudre cette équation matricielle pour obtenir une formule donnant x et y en fonction des paramètres a, b, c, d, e et f.

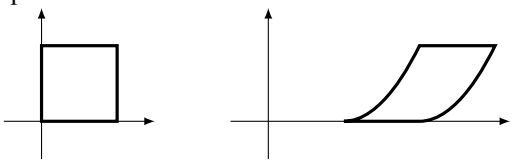
Question 9
Soit $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y+1 \\ y^2 \end{pmatrix}.$$

a) Évaluer $T\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $T\begin{pmatrix} x+1 \\ x \end{pmatrix}$.

b) Montrer que la fonction T n'est pas linéaire.

c) Le graphique suivant présente l'effet de T sur le carré unité. Donner une raison géométrique pour laquelle la transformation ne peut pas être linéaire.



Question 10
Trouver une matrice carrée 2×2 telle que $A \neq I$ et $A^3 = I$.

Question 11
Déterminer la matrice associée aux applications linéaires suivantes.

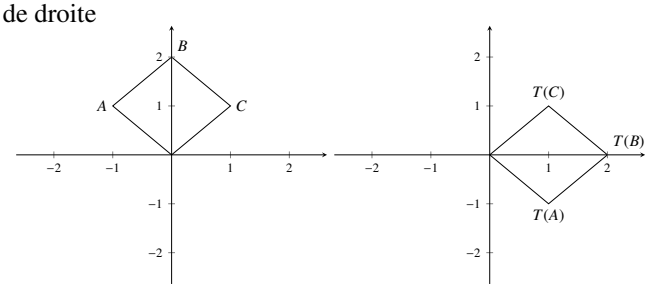
a) l'application linéaire définie par $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$.

b) La transformation linéaire T définie par $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

c) La transformation linéaire T^{-1} inverse de celle donnée en b

d) Une homothétie de facteur 2 suivie d'une rotation d'angle $\pi/4$.

e) La transformation qui envoie la figure de gauche sur la figure de droite



Solutions

Question 1

a) Faux, car on peut sortir une constante k pour chaque ligne de A devant le déterminant. Comme on sort n fois une constante k du déterminant, l'égalité devrait plutôt être
$$|kA| = k^n |A|.$$

b) Faux, seulement les matrices équivalentes lignes à la matrice identité

c) Faux, par exemple si $A = R_\theta$, alors $|A|^2 = 1$ mais $A \neq I$

d) Vrai

e) Faux, car $00^T = 0 \neq I$

f) Faux, il faut que les deux vecteurs forment une base

g) Vrai : $R_{\pi/7}^{14} = R_{14\frac{\pi}{7}} = R_{2\pi} = I$

h) Faux, l'affirmation est vraie seulement si T est linéaire.

i) Faux car le déterminant de certaines applications linéaires peut être 0, par exemple si T est l'application 0.

Question 2

(2)

Question 3

a) $X = A^{-1}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}B^{-1} = C - \frac{1}{56}\begin{pmatrix}-18 & -6\\ -19 & 3\end{pmatrix}$

b) $X = \left(A^{-1}\right)^\top BC^\top = \frac{1}{8}\begin{pmatrix}28 & -7\\ 4 & -11\end{pmatrix}$

c) $X = B^{-1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

Question 4

déterminant = $\frac{1}{384}$

Question 5

Il y a plusieurs réponses possibles, selon l'ordre des opérations dans la réduction. Si on réduit A à sa forme ERL R, on fait deux opérations élémentaires ayant comme matrices élémentaires associées E_1, E_2. On a donc que $E_2E_1A = R$, ce qui implique que $A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}R$, ce qui est un produit de matrices élémentaires (l'inverse d'une matrice élémentaire est élémentaire) et d'une matrice ERL.

Une possibilité est
$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Question 6

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$

b) Avec la matrice adjointe, on utilise la relation $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$. L'adjointe est
$$\text{adj}(A) = \begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -1 & 3\end{pmatrix}$$
et le déterminant est $\det(A) = 1$.

Question 7

Pour simplifier les calculs, on peut soustraire la deuxième colonne à la première et développer selon la première colonne.
$$\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix}$$
$$= -2\begin{vmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}$$
$$= (-2)(-4) = 8$$

Question 8

a) $\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix} \neq 0$, ou « les lignes de A sont linéairement indépendantes », ou encore « la matrice A est inversible.»

Toutes ces conditions sont équivalentes.

b) Si on pose $A\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$, le système d'équations s'écrit $AX = B$. Il a pour solution unique $X = A^{-1}B$. Comme $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$, on a que
$$X = A^{-1}B$$
$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e\\f\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix}de-bf\\ -ce+af\end{pmatrix}$$
ce qui nous donne
$$x = \frac{de-bf}{ad-bc}, \quad y = \frac{-ce+af}{ad-bc}.$$

Question 9

a) $T\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+1+1\\ 1^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+1+1\\ 1^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$
$T\begin{pmatrix}x+1\\ x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(x+1)+x+1\\ x^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2x+2\\ x^2\end{pmatrix}$

b) D'une part, on a que
$$T\left(k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}kx+ky+1\\ (ky)^2\end{pmatrix}$$
D'autre part,
$$kT\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = k\begin{pmatrix}x+y+1\\ y^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}kx+ky+k\\ ky^2\end{pmatrix}.$$
Ainsi,
$$T\left(k\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) \neq kT\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$
et donc T ne peut être linéaire.

c) L'origine n'est pas envoyée sur l'origine et les droites ne sont pas envoyés sur des droites.

Question 10

La matrice de rotation $R_{2\pi/3} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$. Il est clair que $R_{2\pi/3} \neq I$ et on a que $R_{2\pi/3}^3 = R_{3\cdot 2\pi/3} = R_{2\pi} = I$.

Question 11

a) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$
$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

e) $[T]\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ et donc
$$[T] = \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\left(\frac{1}{-2}\right)\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$
$$= -\left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$
$$= -\left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}0 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$