

Fonctions quadratiques

1. Fonctions quadratiques

Définition. Une **fonction quadratique** est une fonction définie par un polynôme de degré 2 :

$$f(x) = ax^2 + bx + c,$$

avec $a \neq 0$.

Note. On suppose que $a \neq 0$ car si $a = 0$, le polynôme $ax^2 + bx + c$ est en fait le polynôme de degré 1 $bx + c$. Dans ce cas, la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ est une fonction affine.

On utilise un des trois formes suivantes pour définir une fonction quadratique.

Définition. La **forme générale** est

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

La **forme canonique** d'une fonction quadratique est

$$y = a(x - h)^2 + h.$$

La **forme factorisée** est

$$f(x) = a(x - z_1)(x - z_2).$$

On peut passer d'une forme à une autre à l'aide de manipulations algébriques appropriées.

Question 1

Mettre la définition de la fonction quadratique suivante sous forme factorisée :

$$f(x) = x^2 - 3x - 4.$$

Question 2

Mettre la définition de la fonction quadratique suivante sous forme générale :

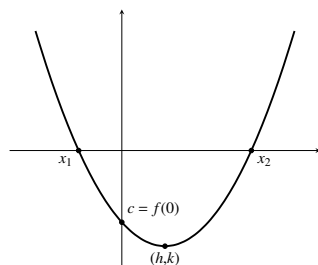
$$f(x) = 3(x - 2)^2 - 1.$$

2. Graphe des fonctions quadratiques

Définition. Le graphe de la fonction définie par une équation quadratique de la forme

$$y = ax^2 + bx + c$$

où a , b et c sont des nombres réels et $a \neq 0$, est une **parabole**.



2.1. Sommet

Proposition 1. Le sommet de la parabole définie par $y = f(x)$ où f est une fonction quadratique est le point (h, k) si f est sous forme canonique

$$f(x) = a(x - h)^2 + k.$$

Exemple 1. Si $f(x) = 5(x - 2)^2 + 3$, le sommet de la parabole est au point $(2, 3)$.

Si $f(x) = 5(x + 2)^2 + 3$, le sommet de la parabole est au point $(-2, 3)$.

Si $f(x) = 5(x + 2)^2 - 3$, le sommet de la parabole est au point $(-2, -3)$.

Proposition 2. Les coordonnées du sommet de la parabole définie sous forme générale $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont

$$x = h = -\frac{b}{2a} \quad y = k = f(h).$$

Question 3

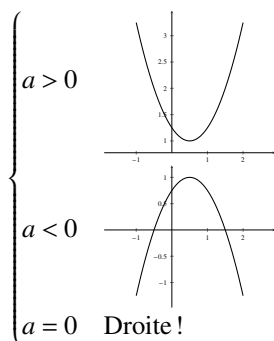
Déterminer les coordonnées du sommet des paraboles dont les équations sont les suivantes.

a) $y = x^2 - 4x + 4$

b) $y = 2x^2 + 8x - 3$

c) $y = 2x^2 + 6x + 1$

2.2. Orientation



Question 4

Déterminer l'orientation des paraboles dont les équations sont les suivantes. Répondez en choisissant entre $\cup$, $\cap$ et — .

a) $y = 3x^2 - 4x + 5$

d) $y = -4x + 5^2$

b) $y = -\frac{2x^2}{3} + 4x + 1$

e) $y = (x + 1)^2 - 3$

c) $y = \frac{-2x^2}{-5} - 4x - 5$

f) $y = -\frac{4(x + 1)^2}{5} + \sqrt{10}$

2.3. Ordonnée à l'origine

Proposition 3. L'ordonnée à l'origine d'une fonction quadratique f est $f(0)$.

Exemple 2. Déterminer l'ordonnée à l'origine de $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

$$f(0) = (0)^2 - 3(0) + 4 = 4.$$

Exemple 3. Déterminer l'ordonnée à l'origine de $f(x) = -\frac{2(x-2)^2}{3} + 1$.

$$f(0) = -\frac{2(0-2)^2}{3} + 1 = -\frac{8}{3} + 1 = -\frac{5}{3}.$$

Question 5

Déterminer l'ordonnée à l'origine des fonctions quadratique suivantes.

a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 9$

d) $f(x) = (x-1)^2 - 2$

b) $f(x) = \frac{2x^2}{3} + \frac{x}{5} + 1$

e) $f(x) = 3(x+2)^2 - 5$

c) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{5}} + \frac{x}{\sqrt{3}} + \log_2(10)$

f) $f(x) = -\frac{3(x+1)^2}{4} + 1$

2.4. Zéros

Définition. Les zéros d'une fonction quadratique f sont les solutions de l'équation

$$f(x) = 0.$$

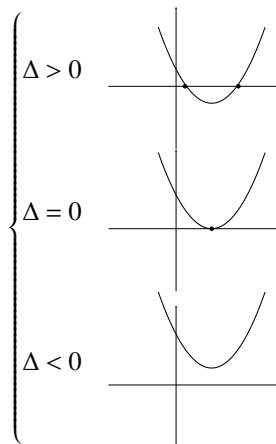
Proposition 4. Les zéros de la fonction quadratique définie sous la forme factorisée $f(x) = a(x-z_1)(x-z_2)$ sont z_1 et z_2 .

Proposition 5. Les zéros d'une fonction quadratique sous la forme canonique $f(x) = ax^2 + bx + c$ peuvent être déterminé à l'aide de la formule quadratique

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Définition. Le discriminant de $ax^2 + bx + c$ est $\Delta = b^2 - 4ac$.

Proposition 6. Le nombre de zéros d'une fonction quadratique dépend du signe du discriminant de la manière suivante.



Question 6

Déterminer le nombre de zéros des fonctions quadratiques suivantes en utilisant le discriminant.

- a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 4$
b) $f(x) = -x^2 - 2x - 3$ d) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$

Exemple 4. Déterminer les zéros de la fonction définie par $f(x) = 3x^2 + 4x - 2$

À l'aide de la formule quadratique, on trouve que $f(x) = 0$ si et seulement si

$$\begin{aligned} x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{6} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{6} \\ &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{6} \\ &= \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3} \end{aligned}$$

Les zéros de la fonction f sont donc

$$\frac{-2 + \sqrt{10}}{3} \text{ et } \frac{-2 - \sqrt{10}}{3}.$$

Question 7

Déterminer les zéros des fonctions quadratiques suivantes.

- a) $f(x) = -3(x - 2)(x + 1)$ c) $f(x) = 2(x - 1)^2 - 8$
b) $f(x) = x^2 - 8x + 15$ d) $f(x) = 3(x - 2)^2 + 6$

2.5 Sommet

Proposition 7. Les coordonnées du sommet de la parabole définie par la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ sont

$$(h, k) = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right) \right)$$

Exemple 5. Déterminons les coordonnées du sommet du graphe de la fonction quadratique définie par

$$f(x) = 2x^2 + 3x + 4.$$

Comme $a = 2$ et $b = 3$, on a que

$$h = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2(2)} = -\frac{3}{4}.$$

On a ensuite que

$$\begin{aligned}
 k &= f(h) \\
 &= 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 3\left(-\frac{3}{4}\right) + 4 \\
 &= 2\left(\frac{9}{16}\right) - \frac{9}{4} + 4 \\
 &= \frac{9}{8} - \frac{9}{4} + 4 \\
 &= \frac{9}{8} - \frac{18}{8} + \frac{32}{8} \\
 &= \frac{23}{8}
 \end{aligned}$$

Le sommet du graphe de f est donc en $\left(-\frac{3}{4}, \frac{23}{8}\right)$.

Question 8

Déterminer les coordonnées du sommet des fonctions quadratique suivantes.

- a) $f(x) = x^2 - 4x + 4$ c) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \sqrt{2}x + \frac{3}{2}$
b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$

Exemple 6. Déterminer les zéros et les coordonnées du sommet le la parabole définie par $f(x) = -(x-4)^2 + 3$.

Pour trouver les zéros, on résout

$$\begin{aligned}
 f(x) = 0 &\iff -(x-4)^2 + 3 = 0 \\
 &\iff (x-4)^2 = 3 \\
 &\iff x-4 = \pm \sqrt{3} \\
 &\iff x = 4 \pm \sqrt{3}.
 \end{aligned}$$

Le sommet de la parabole est en $(h,k) = (4,3)$.

Question 9

Déterminer les zéros et les coordonnées du sommet des paraboles suivantes.

- a) $f(x) = x^2 - x + 4$ b) $f(x) = (x-1)^2 + 5$ c) $f(x) = (x-5)(x-2)$

2.6. Forme générale à forme canonique et complétion de carré

On peut passer de la forme générale d'une fonction quadratique à la forme canonique à l'aide d'une complétion de carré.

Exemple 7. Déterminer la forme canonique de la fonction quadratique définie par

$$f(x) = x^2 - 4x + 7.$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 - 4x + 7 \\
 &= x^2 - 4x + 4 - 4 + 7 \\
 &= (x^2 - 4x + 4) + 3 \\
 &= (x-2)^2 + 3
 \end{aligned}$$

Question 10

Déterminer les coordonnées du sommet des paraboles définie par les fonctions quadratiques suivantes à l'aide d'une complétion de carré.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 5$

c) $f(x) = x^2 + 4x - 1$

Exercices supplémentaires**Question 11**

Déterminer les coordonnées du sommet des paraboles définie par les fonctions quadratique suivantes.

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

e) $f(x) = 2x^2 + 6x - 2$

b) $f(x) = 3x^2 - 6x + 9$

f) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 3$

c) $f(x) = -2x^2 + 5x + 2$

g) $f(x) = -\frac{x^2}{3} + \frac{x}{6} + 1$

d) $f(x) = x^2 + 3x + 4$

Question 12

Déterminer le graphe des fonctions quadratiques suivantes. Indiquer sur le graphe les coordonnées du sommet, les zéros et l'ordonnée à l'origine.

a) $y = (x - 3)^2$

b) $y = (x - 2)^2 - 1$

c) $y = (x + 1)^2 - 2$

Question 13

Mettre la définition des fonctions quadratiques suivantes sous forme générale.

a) $f(x) = (x - 3)^2 + 2$

b) $f(x) = 2(x + 1)^2 - 3$

c) $f(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 + 1$

d) $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{3} + \frac{1}{3}$

e) $f(x) = \frac{2(x-1)^2}{3} + \frac{1}{3}$

f) $f(x) = \frac{-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}{2} + \frac{5}{2}$

Question 14

Passez de la forme générale à la forme canonique à l'aide d'une complétion de carré.

a) $f(x) = -3x^2 - 18x - 25$

b) $f(x) = -5x^2 - 5x + \frac{3}{4}$

c) $f(x) = -10x^2 + 100x - 251$

d) $f(x) = 2x^2 - 20x + 52$

e) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$

f) $f(x) = \frac{x^2}{3} + \frac{4x}{3} + 2$

Question 15

Déterminer les intervalles de croissance et décroissance des fonctions quadratiques suivantes.

a) $f(x) = x^2 - 3$

b) $f(x) = (x - 3)^2$

c) $f(x) = (x + 3)^2$

d) $f(x) = 2(x + 3)^2$

e) $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$

Question 16

Trouver les zéros des fonctions suivantes.

a) $f(x) = (x - 1)(x + 1)$

b) $f(x) = (x - 2)(x + 3)$

c) $f(x) = x^2 - 4x - 5$

d) $f(x) = x^2 - 3x - 4$

e) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$

f) $f(x) = x^2 - 4x - 1$

g) $f(x) = 5x^2 - 2x + 2$

h) $f(x) = 6x^2 - 5x + 1$

Question 17

Trouver les zéros, les sommets et esquisser les graphes des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^2 - x + 6$

b) $f(x) = 4x^2 - 36$

c) $f(x) = -2x^2 - 2x + 40$

d) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

e) $f(x) = -3x^2 + 5x + 8$

Solutions

Question 1

On factorise le polynôme :

$$x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$$

La forme factorisée de la définition de f est donc

$$f(x) = (x-4)(x+1).$$

Question 2

On développe le polynôme :

$$\begin{aligned} 3(x-2)^2 - 1 \\ = 3(x^2 - 4x + 4) - 1 \\ = 3x^2 - 12x + 11 \end{aligned}$$

La forme générale de la définition de f est donc

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 11.$$

Question 3

a) $h = \frac{-(-4)}{2(1)} = 2$
 $k = (2)^2 - 4(2) + 4 = 0$.
 Le sommet est $(2, 0)$.

b) $h = \frac{-(8)}{2(2)} = -2$
 $k = (-2)^2 + 8(-2) - 3$
 $= 4 - 16 - 3$
 $= -15$
 Le sommet est $(-2, -15)$.

c) $h = \frac{-(6)}{2(2)} = -\frac{3}{2}$
 $k = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{3}{2}\right) + 1$
 $= \frac{9}{4} + 3 \cdot 3 + 1$
 $= \frac{9}{4} + 10$
 $= \frac{9}{4} + \frac{40}{4}$
 $= \frac{49}{4}$
 Le sommet est $\left(-\frac{3}{2}, \frac{49}{4}\right)$.

Question 4

- a) $\cup$
- b) $\cap$
- c) $\cup$
- d) $—$
- e) $\cup$
- f) $\cap$

Question 5

- a) $f(0) = 9$
- b) $f(0) = 1$
- c) $f(0) = \log_2(10)$
- d) $f(0) = -1$
- e) $f(0) = 7$
- f) $f(0) = \frac{1}{4}$

Question 6

- a) $\Delta = (-2)^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$.
Il y a donc deux zéros.
- b) $\Delta = (-2)^2 - 4(-1)(-3) = -8 < 0$. Il y a donc aucun zéros.
- c) $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 0$. Il y a donc un seul zéro.
- d) $f(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$
 $\Delta = (4)^2 - 4(1)(5) = -4 < 0$.
Il y a donc aucun zéros.

Question 7

- a) $f(x) = 0$
 $-3(x-2)(x+1) = 0$
 $(x-2)(x+1) = 0$
 $x = 2$ ou $x = -1$
- b) $f(x) = 0$
 $x^2 - 8x + 15 = 0$
 $(x-3)(x-5) = 0$
 $x = 3$ ou $x = 5$
- c) $f(x) = 0$
 $2(x-1)^2 - 8 = 0$
 $2(x-1)^2 = 8$
 $(x-1)^2 = 4$
 $x-1 = \pm\sqrt{4}$
 $x-1 = \pm 2$
 $x = 1 \pm 2$
 $x = -1$ ou $x = 3$
- d) $f(x) = 0$
 $3(x-2)^2 + 6 = 0$
 $3(x-2)^2 = -6$
 $(x-2)^2 = -2$
 L'équation n'a pas de solution quand $(x-2)^2$ est toujours un nombre positif.
 La fonction f n'a pas de zéros.

Question 8

- a) $h = -\frac{b}{2a}$
 $= -\frac{-4}{2(1)}$
 $= 2$.
 $k = f(h)$
 $= f(2)$
 $= (2)^2 - 4(2) + 4$
 $= 4 - 8 + 4$
 $= 0$.
 Le sommet est donc en $(2, 0)$.
- b) $h = -\frac{b}{2a}$
 $= -\frac{-2}{2(3)}$
 $= \frac{1}{3}$.
 $k = f(h)$
 $= f\left(\frac{1}{3}\right)$
 $= 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right) + 1$
 $= \frac{3}{3^2} - \frac{2}{3} + \frac{3}{3}$
 $= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{3}{3}$
 $= \frac{2}{3}$.
 Le sommet est donc en $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.
- c) $h = -\frac{b}{2a}$
 $= -\frac{-\sqrt{2}}{2\left(\frac{1}{2}\right)}$
 $= \sqrt{2}$.
 $k = f(h)$
 $= f(\sqrt{2})$
 $= \frac{(\sqrt{2})^2}{2} - \sqrt{2}(\sqrt{2}) + \frac{3}{2}$
 $= \frac{2}{2} - 2 + \frac{3}{2}$
 $= 1 - 2 + \frac{3}{2}$
 $= \frac{1}{2}$.
 Le sommet est donc en $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Question 9

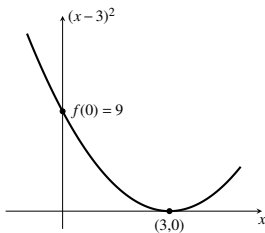
- a) On trouve les zéros en factorisant :
 $x^2 - 5x + 4 = (x-4)(x-1)$,
 les zéros sont donc 1 et 4.
 On trouve le sommet
 $h = \frac{-(-5)}{2(1)} = \frac{5}{2}$,
 et que
 $k = f\left(\frac{5}{2}\right)$
 $= \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 4$
 $= \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 4$
 $= \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{16}{4}$
 $= -\frac{9}{4}$
 - b) Les zéros sont 2 et 5.
 Pour trouver le sommet, on développe pour mettre sous forme générale :
 $(x-5)(x-2) = x^2 - 7x + 10$.
 On a donc que
 $h = \frac{-(-7)}{2(1)} = \frac{7}{2}$,
 et que
 $k = f\left(\frac{7}{2}\right)$
 $= \left(\frac{7}{2} - 5\right)\left(\frac{7}{2} - 2\right)$
 $= \left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$
 $= -\frac{9}{4}$
- ## Question 10
- a) $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 3$
 $= (x-1)^2 - 4$
 $(1, -4)$
 - b) $x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1 - 1 + 5$
 $= (x+1)^2 + 5$
 $(-1, 4)$
 - c) $x^2 + 4x - 1 = x^2 + 4x + 4 - 4 - 1$
 $= (x+2)^2 - 5$
 $(-2, -5)$

Question 11

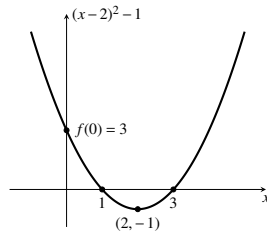
- a) $(1, -4)$
- b) $(1, 6)$
- c) $(-\frac{5}{4}, \frac{41}{8})$
- d) $(-\frac{3}{4}, \frac{7}{4})$
- e) $(-\frac{3}{2}, -\frac{13}{2})$
- f) $(-2, -5)$
- g) $(\frac{1}{4}, \frac{49}{48})$

Question 12

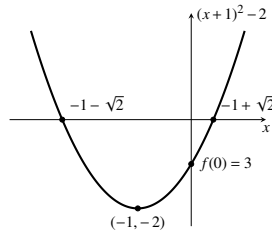
- a) Sommet : $(h, k) = (3, 0)$
 Zéros : $f(x) = 0 \iff (x-3)^2 = 0 \iff x = 3$
 Ordonnée à l'origine :
 $f(0) = ((0)-3)^2 = 9$



- b) Sommet : $(h, k) = (2, -1)$
 Zéros :
 $f(x) = 0 \iff (x-2)^2 - 1 = 0 \iff (x-2)^2 = 1 \iff x-2 = \pm 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = 3$
 Ordonnée à l'origine :
 $f(0) = ((0)-2)^2 - 1 = 3$



- c) Sommet : $(h, k) = (-1, -2)$
 Zéros :
 $f(x) = 0 \iff (x+1)^2 - 2 = 0 \iff (x+1)^2 = 2 \iff x+1 = \pm \sqrt{2} \iff x = -1 \pm \sqrt{2}$
 Ordonnée à l'origine :
 $f(0) = ((0)+1)^2 - 2 = -1$



Question 13

- a) $f(x) = x^2 - 6x + 11$
- b) $f(x) = 2x^2 + 4x - 1$
- c) $f(x) = x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{10}{9}$
- d) $f(x) = \frac{2x^2}{3} - \frac{4x}{3} + 1$
- e) $f(x) = \frac{2x^2}{3} - \frac{4x}{3} + 1$
- f) $f(x) = -\frac{3x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{17}{8}$

Question 14

- a) $f(x) = -3(x+3)^2 + 2$
- b) $f(x) = -5(x+\frac{1}{2})^2 + 2$
- c) $f(x) = -10(x-5)^2 - 1$
- d) $f(x) = 2(x-5)^2 + 2$
- e) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{2} + 1$
- f) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{2} + \frac{2}{3}$

Question 15

- a) Décroissant sur $]-\infty, 0]$, croissant sur $[0, \infty[$.
- b) Décroissant sur $]-\infty, 3]$, croissant sur $[3, \infty[$.
- c) Décroissant sur $]-\infty, -3]$, croissant sur $[-3, \infty[$.
- d) Décroissant sur $]-\infty, -3]$, croissant sur $[-3, \infty[$.
- e) Décroissant sur $]-\infty, 3]$, croissant sur $[3, \infty[$.

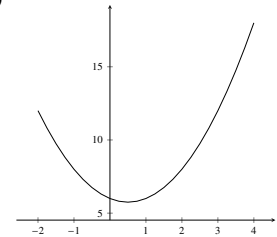
Question 16

- a) $x = 1$ et $x = -1$
- b) $x = 2$ et $x = -3$
- c) $x = -1$ et $x = 5$
- d) $x = -1$ et $x = 4$
- e) $x = 2$ et $x = \frac{1}{2}$
- f) $x = 2 - \sqrt{5}$ et $x = 2 + \sqrt{5}$
- g) Pas de zéro

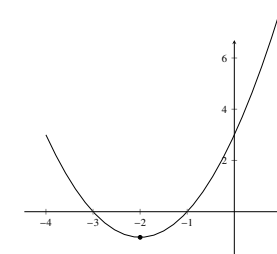
h) $x = \frac{1}{3}$ et $x = \frac{1}{2}$

Question 17

a)



- b) Zéros : $x = -3$ et $x = -1$.
 Sommet en $(-2, -1)$.



- c) Zéros : $x = -1$ et $x = \frac{8}{3}$.
 Sommet en $(\frac{5}{6}, \frac{121}{12})$.

