

Fractions algébriques

1. Fractions algébriques

Définition. Une **fraction algébrique** est un quotient où le numérateur et le dénominateurs sont des polynômes.

$$\frac{A}{B}$$

Exemple 1. Les expressions algébriques suivantes sont des fractions algébriques.

$$\frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 4x + 3} \quad \frac{x^5 + x^4 - 3x^2 + x + 2}{3x^4 + 4x^2 + 2x + 3}$$
$$\frac{1}{x^2 + 1} \quad \frac{x^3 - 1}{x}$$

Question 1

Lesquelles des expressions suivantes sont des fractions algébriques ?

a) $\frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 4x^2 + 3x + 1}$ c) $\frac{1}{x}$ e) $\frac{x}{5}$

b) $\frac{x^2}{x^3 + 1}$ d) $\frac{x^3 + x^{2/3} + \frac{3}{4}}{\frac{x^2}{5} + \frac{5}{3}}$ f) $\frac{3\sqrt{x} + x + 1}{x^2 + 4}$

g) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

1.1. Simplification de fractions algébriques

Rappel. Comme les fractions numériques, on peut simplifier un facteur commun au numérateur et au dénominateur d'une fraction algébrique :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Exemple 2.

$$\frac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{(x-1)\cancel{(x-2)}(x-4)} = \frac{x+4}{(x-1)(x-3)}$$

Exemple 3.

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x + 4} = \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{(x-2)}^2}$$
$$= \frac{x+2}{x-2}$$

Exemple 4.

$$\begin{aligned}
\frac{2x^4 - 3x^3 - 2x^2}{x^3 - x^2 - 2x} &= \frac{x^2(2x^2 - 3x - 2)}{x(x^2 - x - 2)} \\
&= \frac{x^2(2x^2 - 4x + x - 2)}{x((x+1)(x-2))} \\
&= \frac{x^2(2x(x-2) - 2(x-2))}{x(x+1)(x-2)} \\
&= \frac{x^2((2x-2)(x-2))}{x(x+1)(x-2)} \\
&= \frac{2x^2(x-1)(x-2)}{x(x+1)(x-2)} \\
&= \frac{2x(x-1)}{x+1}
\end{aligned}$$

Note. On utilise parfois l'identité suivante :

$$(A - B) = -(B - A).$$

Par exemple :

$$3 - x = -(x - 3)$$

$$-(x - 2) = -x + 2$$

Question 2

Simplifier les fractions algébriques suivantes.

a) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 9}$

b) $\frac{2x^3 - 7x^2 + 3x}{x^4 - 6x^3 + 9x^2}$

2. Opérations sur les fractions algébriques

Les opérations sur les fractions algébriques sont effectuées comme les opérations sur les quotients.

2.1. Produits de fractions algébriques

Rappel (Produit de quotients).

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

Exemple 5.

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-2} \cdot \frac{x-3}{x+2} &= \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4}
\end{aligned}$$

Exemple 6.

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 6} \cdot \frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 - x - 2} &= \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+3)} \cdot \frac{(x+3)^2}{(x-2)(x+1)} \\
&= \frac{(x+1)(x-2)(x+3)^2}{(x+3)(x-2)^2(x+1)} \\
&= \frac{x+3}{x-2}
\end{aligned}$$

Question 3

Multiplier et simplifier.

a) $\frac{4x^2-9}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{2x^2-5x+3}$

b) $\frac{x^3+x^2-6x}{2x^2+8x+8} \cdot \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$

2.2. Quotient de fractions algébriques

Rappel.

$$\frac{A/B}{C/D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Exemple 7.

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{x-6}{x+1}\right)}{\left(\frac{x^2-36}{x^2+2x+1}\right)} &= \left(\frac{x-6}{x+1}\right) \left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-36}\right) \\ &= \left(\frac{x-6}{x+1}\right) \left(\frac{(x+1)^2}{(x-6)(x+6)}\right) \\ &= \frac{(x-6)(x+1)^2}{(x+1)(x-6)(x+6)} \\ &= \frac{x+1}{x+6} \end{aligned}$$

Question 4

Diviser et simplifier.

a) $\frac{\left(\frac{9x^2-25}{x^2+6x+9}\right)}{\left(\frac{3x^2+2x-5}{x^2+2x-3}\right)}$

b) $\frac{\left(\frac{4x^2+4x^2+x}{x^2-2x-8}\right)}{\left(\frac{2x^3+x^2}{2x-1}\right)}$

2.3. Somme et différences de fractions algébriques

On additionne et on soustrait les fractions algébriques avec les propriétés usuelles des fractions.

Rappel. Si deux fractions (algébriques) ont le même dénominateur :

$$\frac{A}{C} + \frac{A}{C} = \frac{A+B}{C} \quad \frac{A}{C} - \frac{A}{C} = \frac{A-B}{C}.$$

Si deux fractions (algébriques) ont des dénominateurs différents, on doit les transformer pour qu'elles aient un dénominateur commun.

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{D} = \frac{AD}{CD} + \frac{BC}{CD} = \frac{AD+BC}{CD}$$

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{D} = \frac{AD}{CD} - \frac{BC}{CD} = \frac{AD-BC}{CD}$$

Bien qu'on puisse toujours prendre CD comme dénominateur commun, on peut aussi prendre un autre dénominateur commun comme le plus petit commun multiple de C et D .

Exemple 8.

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} &= \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} + \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \\
&= \frac{(x+1)(x-2) + (x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \\
&= \frac{x^2 - x - 2 + x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} \\
&= \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}
\end{aligned}$$

Exemple 9.

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^2-4} + \frac{x+2}{(x^2-x-2)} &= \frac{x+1}{(x-2)(x+2)} + \frac{(x+2)}{(x+1)(x-2)} \\
&= \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-2)(x+2)} + \frac{(x+2)(x+2)}{(x+1)(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{(x+1)^2 + (x+2)^2}{(x+1)(x-2)(x+2)} \\
&= \frac{(x^2+2x+1) + (x^2+4x+4)}{(x+1)(x^2-4)} \\
&= \frac{2x^2+6x+5}{(x+1)(x^2-4)}
\end{aligned}$$

Question 5

Additionner les fractions algébriques et simplifier le résultat obtenu.

a) $\frac{x}{x+2} + \frac{1-2x}{x-1}$ b) $\frac{1}{x^2-3x+1} + \frac{1}{x^2+2x-3}$

Exercices supplémentaires**Question 6**

Simplifier les fractions algébriques suivantes.

a) $\frac{x-2}{x^2-4}$ d) $\frac{x^2+2}{x^4-4}$
b) $\frac{x^2-9}{x^2-8x+15}$ e) $\frac{(x+2)^2-1}{(x+2)}$
c) $\frac{3x-4}{9x^2-16}$ f) $\frac{x^4-3x^3+12x^2-8x}{2x^4-8x^3+4x^2}$

Question 7

Multiplier les fractions algébriques suivantes et simplifier le résultat obtenu.

a) $\left(\frac{x-2}{x+1}\right)\left(\frac{(x+1)^2}{x+2}\right)$ c) $\left(\frac{(x-2)(x+3)}{(x+1)^2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$
b) $\left(\frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}\right)\left(\frac{x+1}{x+2}\right)$ d) $\left(\frac{x^2-2x-3}{x^2+4x+4}\right)\left(\frac{x^2-4}{x-6x+9}\right)$

Question 8

Trouver le plus petit commun multiple des polynômes suivants.

a) $x-2$ et $x+1$ d) $(x-2)(x+1)^3$ et $(x-2)^2(x+1)^2$
b) $x-2$ et $(x+1)^2$
c) $(x-2)^2$ et $(x-2)(x+1)^2$ e) x^2+x+1 et $(x+1)^2$
f) x^2-2x-3 et $(x-3)^2$

Question 9

Multiplier ou diviser les fractions algébriques suivantes et simplifier le résultat obtenu.

a) $\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$ d) $\left(\frac{2x+1}{x^2-6x+9}\right)\left(\frac{2x^2-7x+3}{4x^2+4x+1}\right)$
b) $\left(\frac{x^2}{x-2}\right)\left(\frac{1}{x^2+x}\right)$ e) $\left(\frac{x^2-3x}{x^2+2x-15}\right)\left(\frac{x^2-3x-10}{x^2-25}\right)$
c) $\left(\frac{x-2}{x+5}\right)\left(\frac{x^2-25}{x^2-4x+4}\right)$

Question 10

Additionner ou soustraire les fractions algébriques suivantes et simplifier le résultat obtenu.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{x-2}{x+4} + \frac{1}{x+3} \\ \text{b)} \quad & \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x+2} \\ \text{c)} \quad & \frac{x}{x+1} - \frac{x+1}{x+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & \frac{x}{x+1} + \frac{1}{x^2+2x+1} \\ \text{e)} \quad & \frac{x+1}{x+2} + \frac{1}{x^2+4x+4} \\ \text{f)} \quad & \frac{1}{x^2-6x+9} + \frac{1}{x^2-9} \end{aligned}$$

Solutions**Question 1**

- a) L'expression est une fraction algébrique
- b) L'expression est une fraction algébrique.
Note : x^2 est un polynôme.
- c) L'expression est une fraction algébrique car son numérateur et son dénominateur sont des polynômes.
- d) L'expression est n'est pas une fraction algébrique car son numérateur n'est pas un polynôme.
- e) L'expression est une fraction algébrique.
Note : x et 5 sont des polynômes.
- f) L'expression est n'est pas une fraction algébrique car son numérateur n'est pas un polynôme.
- g) L'expression est une fraction algébrique car son numérateur et son dénominateur sont des polynômes (constants).

Question 2

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} \\ & = \frac{x-2}{x+3} \\ \text{b)} \quad & \frac{2x^3-7x^2+3x}{x^4-6x^3+9x^2} = \frac{x(2x^2-7x+3)}{x^2(x^2-6x+9)} \\ & = \frac{x(2x^2-6x-x+3)}{x^2(x-3)^2} \\ & = \frac{x(2x(x-3)-(x-3))}{x^2(x-3)^2} \\ & = \frac{x(2x-1)(x-3)}{x^2(x-3)^2} \\ & = \frac{(2x-1)}{x(x-3)} \\ & = \frac{2x-1}{x^2-3x} \end{aligned}$$

Question 3

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{(2x-3)(2x+3)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(2x-3)} = 2x+3 \\ \text{b)} \quad & \frac{(x+3)x}{2(x+2)} \end{aligned}$$

Question 4

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{3x-5}{x+3} \\ \text{b)} \quad & \frac{4x^2-1}{x^3-2x^2-8x} \end{aligned}$$

Question 5

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & -\frac{x^2+4x-2}{x^2+x-2} \\ \text{b)} \quad & \frac{2(x+1)}{x^3+x^2-5x+3} \end{aligned}$$

Question 6

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2} \\ \text{b)} \quad & \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x+3}{x-5} \\ \text{c)} \quad & \frac{3x-4}{(3x-4)(3x+4)} = \frac{1}{3x+4} \\ \text{d)} \quad & \frac{x^2+2}{(x^2-2)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2-2} \\ \text{e)} \quad & \frac{x^2+2}{(x^2-2)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2-2} \\ \text{f)} \quad & \frac{x(x-2)^3}{2x^2(x-2)^2} = \frac{x-2}{2x} \end{aligned}$$

Question 7

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{(x-2)(x+1)^2}{(x+1)(x+2)} = x+1 \\ \text{b)} \quad & \frac{(x-2)^2(x+1)}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{x-2}{x+1} \\ \text{c)} \quad & \frac{(x-2)(x+3)(x+1)}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{(x+3)}{x+1} \\ \text{d)} \quad & \frac{(x-3)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)^2(x-3)^2} \\ & = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-3)} \end{aligned}$$

Question 8

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (x-2)(x+1) \\ \text{b)} \quad & (x-2)(x+1)^2 \\ \text{c)} \quad & (x-2)^2(x+1)^2 \\ \text{d)} \quad & (x-2)^2(x+1)^3 \\ \text{e)} \quad & (x^2+x+1)(x+1)^2 \\ \text{f)} \quad & (x+1)(x-3)^2 \end{aligned}$$

Question 9

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x^2-1} \\ \text{b)} \quad & \frac{x^2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{x}{x^2-x-2} \\ \text{c)} \quad & \frac{(x-2)(x-5)(x+5)}{(x+5)(x-2)^2} = \frac{x-5}{x-2} \\ \text{d)} \quad & \frac{(2x+1)(2x-1)(x-3)}{(x-3)^2(2x+1)^2} = \frac{2x-1}{2x^2-5x-3} \\ \text{e)} \quad & \frac{x}{x+2} \end{aligned}$$

Question 10

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{(x-2)(x+3)+(x+4)}{(x-2)(x+4)} = \frac{x^2+2x-2}{x^2+7x+12} \\ \text{b)} \quad & \frac{x(x+2)(x+2)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} \\ & = \frac{(x(x+2)+(x+1))(x+2)}{(x+1)(x+2)} \\ & = \frac{x(x+2)+(x+1)}{x+1} \\ & = \frac{x^2+2x+x+1}{x+1} \\ & = \frac{x^2+3x+1}{x+1} \\ \text{c)} \quad & \frac{x(x+2)(x+2)-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} \\ & = -\frac{1}{x^2+3x+2} \\ \text{d)} \quad & \frac{x(x+1)+1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2} \\ \text{e)} \quad & \frac{(x+1)(x+2)+1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+3x+3}{x^2+4x+4} \\ \text{f)} \quad & \frac{(x+3)+(x-3)}{(x+3)(x-3)^2} = \frac{2x}{x^3-3x^2-9x+27} \end{aligned}$$