Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent
Mathématiques pour l'électronique 1 — 201-71E-SL — A2025

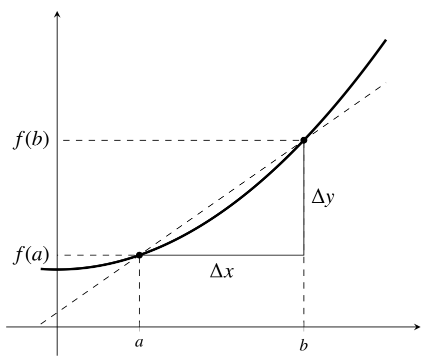
Interpolation linéaire

1. Interpolation linéaire

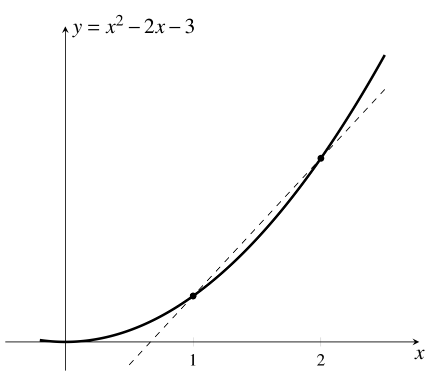
L'interpolation linéaire est une méthode pour trouver une valeurs entre deux valeurs données d'une fonction, en supposant que les deux points donnés de la fonction sont reliés par une droite.

Proposition 1. La pente de la droite passant par deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ d'une fonction est

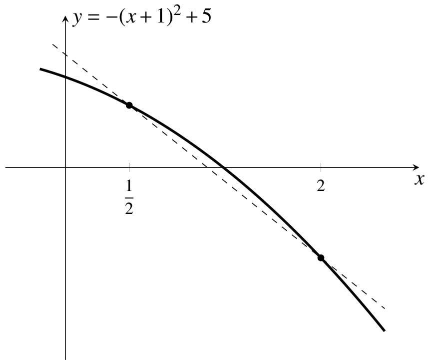
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Question 1
Déterminer la pente de la droite passant par les points indiqués dans le graphe suivant.



Question 2
Déterminer la pente de la droite passant par les points indiqués dans le graphe suivant.



Question 3
Déterminer la pente de la droite passant par les points en $x = 2$ et $x = 3$ à l'aide du tableau de valeur suivant :

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	3	1/3	2	5	10	16

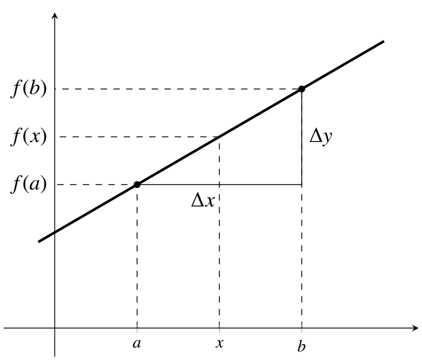
.

1.2. Interpolation linéaire exacte

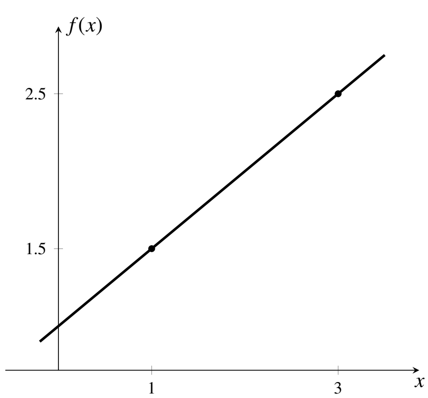
Si on fait une interpolation linéaire sur une droite, les valeurs trouvées sont exactes.

Proposition 2. Si on connait deux points $(a,f(a))$ et $(b,f(b))$ sur une droite, la valeur de y correspondant à une valeur quelconque de x est

$$f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a) + f(a).$$



Question 4
Déterminer les valeur de $f(2)$ et $f(4)$ à partir des informations données dans le graphe suivant.



Question 5
Déterminer la valeur de $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$ à l'aide du tableau de valeur suivant :

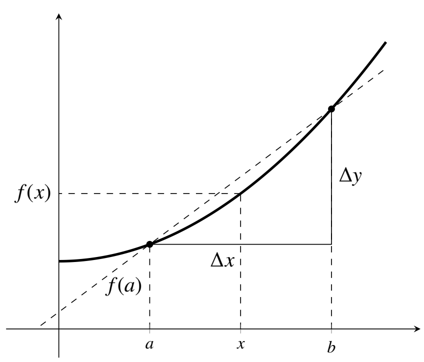
x	0	2	4	6
$f(x)$	1	4	7	10

1.3. Approximation par interpolation linéaire

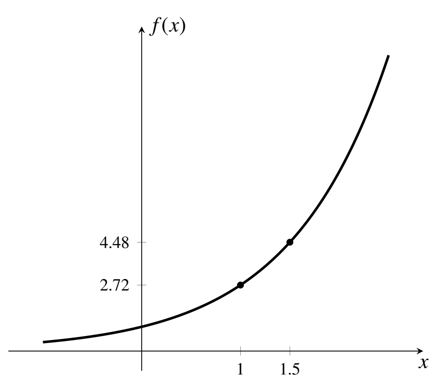
Si on fait une interpolation linéaire à partir d'une fonction quelconque, de manière générale les valeurs trouvées sont des approximations des valeurs de la fonction.

Proposition 3. On peut faire une interpolation linéaire entre deux valeurs d'une fonction pour estimer une valeur intermédiaire. Plus l'écart Δx entre deux valeurs de la variable indépendante est petit, meilleure est cette approximation.

$$f(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}(x-a)+f(a)$$



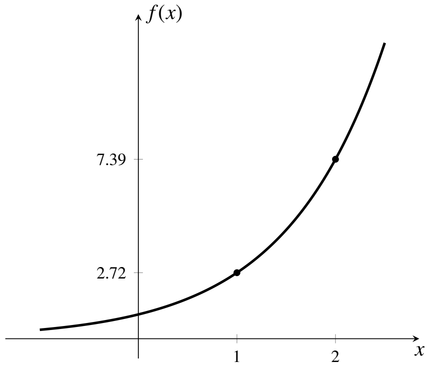
Exemple 1. Estimons la valeur de $f(1.25)$ par interpolation linéaire partir des informations données dans le graphe suivant.



$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4.48-2.72}{1.5-1}(x-1)+f(1) \\ &= 3.52(x-1)+2.72 \end{aligned}$$

$$f(1.5) \approx 3.52(1.25-1)+2.72 = 3.6.$$

Question 6
Estimer la valeur$f(2)$ par interpolation linéaire partir des informations données dans le graphe suivant.



Exemple 2. Estimons la valeur de $f(5)$ à l'aide du tableau de valeurs suivant :

x	0	2	4	6
$f(x)$	1.3	4.7	9.8	13.2

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{13.2-9.8}{6-4}(x-4)+f(4) \\ &= 1.7(x-4)+9.8 \end{aligned}$$

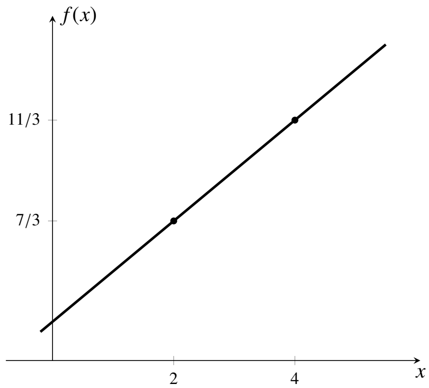
$$f(5) = 1.7(5-4)+9.8 = 11.5.$$

Question 7
Estimer la valeur de $f(3)$ à l'aide du tableau de valeur suivant :

x	0	2	4	6
$f(x)$	1.3	4.7	9.8	13.2

2. Exercices supplémentaires

Question 8
Déterminer les valeur de $f(0)$, $f(3)$ et $f(6)$ à partir des informations données dans le graphe suivant.

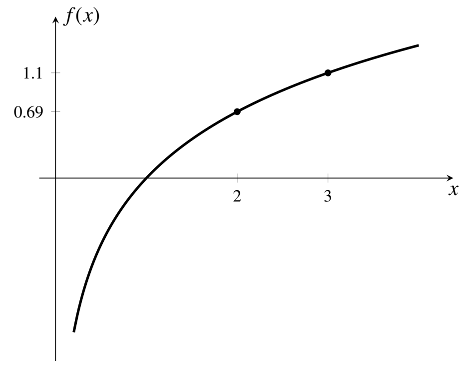


Question 9
Déterminer la valeur de $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$ à l'aide du tableau de valeur suivant :

x	0	2	4	6
$f(x)$	1	4	7	10

.

Question 10
Estimer la valeur$f(2.5)$ par interpolation linéaire partir des informations données dans le graphe suivant.



Question 11
Estimer la valeur de $f(5)$ à l'aide du tableau de valeur suivant :

x	0	2	4
$f(x)$	-1.5	4.0	9.5

.

Solutions

Question 1

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2) - f(1)}{2-1} = \frac{4-1}{1} = 3$$

Question 2

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(2) - f(1/2)}{2-1/2}\\ &= \frac{(-(2+1)^2+5) - (-(1/2+1)^2+5}{3/2}\\ &= \frac{(-3^2+5) - (-(3/2)^2+5}{3/2}\\ &= \frac{(-3^2+5) + (3/2)^2 - 5}{3/2}\\ &= \frac{-3^2 + (3/2)^2}{3/2}\\ &= \frac{-9+\frac{9}{4}}{3/2}\\ &= \frac{\frac{-36+9}{4}}{3/2}\\ &= \frac{\frac{-27}{4}}{3/2}\\ &= \frac{-27}{4} \cdot \frac{2}{3}\\ &= -\frac{9}{2}\end{aligned}$$

Question 3

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(3) - f(2)}{3-2} = \frac{5-2}{3-2} = \frac{3}{1} = 3$$

Question 4

$$f(x) = \frac{2.5-1.5}{3-1}(x-1) + f(1) = \frac{1}{2}(x-1) + 1.5$$

$f(2) = \frac{1}{2}(2-1) + 1.5 = 0.5 + 1.5 = 2$. $f(4) = \frac{1}{2}(4-1) + 1.5 = 1.5 + 1.5 = 3$.

Question 5

$$f(x) = \frac{4-1}{2-0}(x-0) + f(0) = \frac{3}{2}x + 1$$

$f(1) = \frac{3}{2}(1) + 1 = \frac{5}{2} = 2.5$.
$f(3) = \frac{3}{2}(3) + 1 = \frac{11}{2} = 5.5$.
$f(5) = \frac{3}{2}(5) + 1 = \frac{17}{2} = 8.5$.

Question 6

$$f(x) \approx \frac{7.39-2.72}{2-1}(x-1) + f(1) = 4.67(x-1) + 2.39$$

$f(1.5) \approx 4.67(1.5-1) + 2.39 = 4.72$.

Question 7

$$f(x) = \frac{9.8-4.7}{4-2}(x-2) + f(2) = 2.55(x-2) + 4.7$$

$f(3) = 2.55(3-2) + 4.7 = 7.25$.

Question 8

$$f(x) = \frac{3-2}{4-2}(x-1) + f(2) = \frac{2}{3}(x-2) + \frac{7}{3}$$

$f(0) = \frac{2}{3}(0-2) + \frac{7}{3} = 1$.
$f(3) = \frac{2}{3}(3-2) + \frac{7}{3} = 3$.
$f(6) = \frac{2}{3}(6-2) + \frac{7}{3} = 5$.

Question 9

$$f(x) = \frac{4-1}{2-0}(x-0) + f(0) = \frac{3}{2}x + 1$$

$f(1) = \frac{3}{2}(1) + 1 = \frac{5}{2} = 2.5$.
$f(3) = \frac{3}{2}(3) + 1 = \frac{11}{2} = 5.5$.
$f(5) = \frac{3}{2}(5) + 1 = \frac{17}{2} = 8.5$.

Question 10

$$f(x) \approx \frac{1.1-0.69}{3-2}(x-2) + f(2) = (0.41)(x-2) + 0.69$$

$f(2.5) \approx (0.41)(2.5-2) + 0.68 = 0.885$.

Question 11

$$f(x) \approx \frac{9.5-5}{4-2}(x-2) + f(2) = 2.75(x-2) + 4.0$$

$f(5) \approx 2.75(5-2) + 4.0 = 12.25$.