1. Décibels

Définition. Le décibel est une unité de grandeur sans dimension permettant de comparer une puissance P à une puissance de référence P_0 définie de la manière suivante :

$$D = 10\log_{10}\left(\frac{P}{P_0}\right),$$

où P_0 est une puissance de référence.

Exemple 1. On mesure une puissance de 100 W à la sortie d'un amplificateur où entre un signal de 10 W. Quelle est le nombre de décibel de cet amplificateur ?

$$\begin{aligned} D &= 10\log_{10}\left(\frac{100\,\mathrm{W}}{10\,\mathrm{W}}\right) \\ &= 10\log_{10}(10) \\ &= 10\cdot 1 \\ &= 10\,\mathrm{dB}. \end{aligned}$$

Exemple 2. On mesure une puissance de 20 W à la sortie d'un amplificateur où entre un signal de 10 W. Quelle est le nombre de décibel de cet amplificateur ?

$$D = 10\log_{10}\left(\frac{20\,\mathrm{W}}{10\,\mathrm{W}}\right) = 10\log_{10}(2) \approx 10\cdot 3.01 = 30.1\,\mathrm{dB}.$$

Question 1
Calcucler le nombre de décibel dans les situations suivantes.

a) On compare une puissance de 10 W avec une puissance de base de 100 W.

b) On multiplie par 3 la puissance de base.

Note. Si le rapport $\frac{P}{P_0}$ est le même, peut importe les puissances impliquée, le nombre de décibel est le même. Cela veut dire que si on double la puissance ($P = 2P_0$), le nombre de décibel est toujours approximativement 3.01, peu importe la puissance de base.

$$D = 10\log_{10}\left(\frac{2P_0}{P}\right) = 10\log_{10}(2) \approx 10\cdot 3.01 = 30.1\,\mathrm{dB}.$$

De même, si on décuple la puissance ($P = 10P_0$), le nombre de décibel sera toujours 10.

$$D = 10\log_{10}\left(\frac{10P_0}{P}\right) = 10\log_{10}(10) \approx 10\cdot 1 = 10\,\mathrm{dB}.$$

2. Techniques d'estimation

2.1. Estimation rapide des décibels

On peut utiliser les deux valeurs suivantes pour estimer rapidement le nombre de décibels à partir du ratio de puissance $\frac{P}{P_0}$:

$$10\log_{10}(10) = 10 \qquad 10\log_{10}(2) \approx 3$$

En combinant ces valeurs à l'aide des propriétés des logarithmes

$$\log_{10}(AB) = \log_{10}(A) + \log_{10}(B)$$

Exemple 3. Estimer le nombre de décibel si $\frac{P}{P_0} = 8$ Comme $\frac{P}{P_0} = 8 = 2^3$,

$$10\log_{10}(8) = 10\log_{10}(2^3) = 30\log_{10}(2) = 30 \cdot 3 = 90\,\mathrm{dB}$$

Exemple 4. Estimer le nombre de décibel si $\frac{P}{P_0} = 20$

Comme $\frac{P}{P_0} = 8 = 2^3$,

$$\begin{aligned} 10\log_{10}(30) = 10\log_{10}(2 \cdot 10) &= 10\left(\log_{10}(2) + \log_{10}(10)\right) \\ &= 10\log_{10}(2) + 10\log_{10}(10) \\ &\approx 3 + 10 \\ &= 13\,\mathrm{dB} \end{aligned}$$

Exemple 5. Estimer le nombre de décibel si $\frac{P}{P_0} = 17$

Comme $\frac{P}{P_0} = 17 =$,

$$\begin{aligned} 10\log_{10}(30) = 10\log_{10}(2 \cdot 10) &= 10\left(\log_{10}(2) + \log_{10}(10)\right) \\ &= 10\log_{10}(2) + 10\log_{10}(10) \\ &\approx 3 + 10 \\ &= 13\,\mathrm{dB} \end{aligned}$$

2.2. Estimation rapide des ratios de puissance

On peut utiliser les deux valeurs suivantes pour estimer rapidement la valeur du ratio de puissance $\frac{P}{P_0}$ à partir du nombre de décibel :

$$10\log_{10}(10) = 10 \qquad 10\log_{10}(2) \approx 3$$

En combinant ces valeurs à l'aide des propriétés des logarithmes

$$\log_{10}(AB) = \log_{10}(A) + \log_{10}(B)$$

on peut estimer rapidement le ratio.

Si le nombre de décibel est D, ce nombre peut toujours s'écrire comme la somme d'un multiple de 10 et d'un multiple de 3.
Exemple 6.

$$\begin{aligned} 30 &= 3 \cdot 10 + 0 \cdot 3 \\ 56 &= 5 \cdot 10 + 2 \cdot 3 \\ 79 &= 7 \cdot 10 + 3 \cdot 3 \\ 25 &= 1 \cdot 10 + 5 \cdot 3 \end{aligned}$$

Cette décomposition est toujours possible parce que tous les chiffres de 0 à 9 se trouvent parmis les derniers chiffre des multiples de 3.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$3n$	**0**	**3**	**6**	**9**	1**2**	1**5**	1**8**	2**1**	2**4**	2**7**

Pour décomposer un nombre quelconque dans la forme $3 \cdot a + 10 \cdot b$, on commence par trouver le multiple de 3 correspondant au dernier chiffre, et on complète avec un multiple de 10.
Exemple 7. Pour écrire 47 sous la forme $3a + 10b$, on commence par trouver le multiple de trois se terminant par 7 : $3 \cdot 9 = 27$.

On a donc que

$$47 = 3 \cdot 9 + \text{multiple de } 10 = 3 \cdot 9 + 2 \cdot 10$$

Exemple 8. Pour écrire 48 sous la forme $3a+10b$, on commence par trouver le multiple de trois se terminant par 8 : $3\cdot 6 = 18$.

On a donc que

$$48 = 3\cdot 6 + \text{multiple de } 10 = 3\cdot 6 + 3\cdot 10$$

Question 2
Décomposer les nombres suivants dans la forme $3\cdot a + 10\cdot b$.

a) 28 b) 72 c) 107

Note. On peut utiliser cette décomposition et les observations données plus haut pour approximer facilement le rapport de puissance correspondant à un nombre de décibel donné.

a) chaque augmentation de 10 dB correspond à multiplier la puissance par 10 ;
b) chaque diminution de 10 dB correspond à diviser la puissance par 10 ;
c) chaque augmentation de 3 dB correspond (approximativement) à doubler la puissance ;
d) chaque augmentation de 3 dB correspond (approximativement) à diviser la puissance par 2.

Exemple 9.

$$30\,\text{dB} = 0\cdot 3\,\text{dB} + 3\cdot 10\,\text{dB}$$

On multiplie trois fois la puissance par 10 et on ne la double pas. On multiplie donc par

$$2^0\cdot 10^3 = 30.$$

Exemple 10.

$$56\,\text{dB} = 2\cdot 3\,\text{dB} + 5\cdot 10\,\text{dB}$$

On multiplie cinq fois la puissance par 10 et on la double deux fois. La puissance est donc multipliée

$$2^2\cdot 10^5 = 200000.$$

Exemple 11.

$$79\,\text{dB} = 7\cdot 10\,\text{dB} + 3\cdot 3\,\text{dB}$$

On multiplie sept fois la puissance par 10 et on la double trois fois. La puissance est donc multipliée par

$$2^3\cdot 10^7 = 80000000.$$

Question 3
Par quel facteur est multiplié la puissance d'un signal amplifié de...

a) 100 dB ? b) 25 dB ? c) 15 dB ? d) 33 dB ?

Exercices supplémentaires

Question 4
Calculer le nombre de décibel d'un amplificateur qui multiplie la puissance d'entrée par cinq.

Question 5
Si un signal passe de 1 mW à 10 mW, quel est le gain en décibels ?

Question 6
Décomposer les nombres suivant dans la forme $3a + 10b$.

a) 42
b) 22
c) 23
d) 18
e) 19
f) 36
g) 53
h) 45

Question 7
Par quel facteur est multiplié la puissance d'un signal amplifié de...

a) 120 dB ?
b) 21 dB ?
c) 18 dB ?
d) 33 dB ?

Solutions

Question 1

a) $D = 10\log_{10}\left(\frac{10\,\mathrm{W}}{100\,\mathrm{W}}\right)$
$= 10\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)$
$\approx 10\cdot(-1)$
$= -10\,\mathrm{dB}$

b) $D = 10\log_{10}\left(\frac{3P_0}{P_0}\right)$
$= 10\log_{10}(3)$
$\approx 10\cdot(0.477)$
$= 4.77\,\mathrm{dB}$

Question 2

a) $28 = 6\cdot 3 + 1\cdot 10$
b) $72 = 4\cdot 3 + 6\cdot 10$
c) $107 = 9\cdot 3 + 8\cdot 10$

Question 3

a) $100\,\mathrm{dB} = 2\cdot 10\,\mathrm{dB} + 0\cdot 3\,\mathrm{dB}$. Le facteur est donc
$$2^0\cdot 10^2 = 100.$$

b) $25\,\mathrm{dB} = 1\cdot 10\,\mathrm{dB} + 5\cdot 3\,\mathrm{dB}$. Le facteur est donc
$$2^5\cdot 10^1 = 320.$$

c) $15\,\mathrm{dB} = 0\cdot 10\,\mathrm{dB} + 5\cdot 3\,\mathrm{dB}$. Le facteur est donc
$$2^5\cdot 10^0 = 32.$$

d) $33\,\mathrm{dB} = 3\cdot 10\,\mathrm{dB} + 1\cdot 3\,\mathrm{dB}$. Le facteur est donc
$$2^1\cdot 10^3 = 2000.$$

Question 4

$D = 10\log_{10}\left(\frac{5P_0}{P_0}\right)$
$= 10\log_{10} 5$
$\approx 10\cdot 0{,}69897$
$\approx 6.99\,\mathrm{dB}$

Question 5

$D = 10\log_{10}\left(\frac{10\,\mathrm{mW}}{1\,\mathrm{mW}}\right)$
$= 10\log_{10}(10)$
$= 10\,\mathrm{dB}$

Question 6

a) $42 = 4\cdot 3 + 3\cdot 10$
b) $22 = 4\cdot 3 + 1\cdot 10$
c) $23 = 1\cdot 3 + 2\cdot 10$
d) $18 = 6\cdot 3 + 0\cdot 10$
e) $19 = 3\cdot 3 + 1\cdot 10$
f) $36 = 2\cdot 3 + 3\cdot 10$
g) $53 = 1\cdot 3 + 5\cdot 10$
h) $45 = 15\cdot 3 + 0\cdot 10$

Question 7

a) $120\,\mathrm{dB} = 12\cdot 10\,\mathrm{dB} + 0\cdot 3\,\mathrm{dB}$. Le facteur est donc
$$2^0\cdot 10^{12} = 10^{12}.$$

b) $21\,\mathrm{dB} = 0\cdot 10\,\mathrm{dB} + 7\cdot 3\,\mathrm{dB}$. Le facteur est donc
$$2^7\cdot 10^0 = 128.$$

c) $18\,\mathrm{dB} = 0\cdot 10\,\mathrm{dB} + 6\cdot 3\,\mathrm{dB}$. Le facteur est donc
$$2^6\cdot 10^0 = 64.$$

d) $28\,\mathrm{dB} = 1\cdot 10\,\mathrm{dB} + 6\cdot 3\,\mathrm{dB}$. Le facteur est donc
$$2^6\cdot 10^1 = 640.$$