Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent
Mathématiques pour l'électronique 1 — 201-71E-SL — A2025

Fonctions définie par parties

1. Concept de définition par partie

Définition. Une **fonction définie par parties** est une fonction dont la règle de définition comporte plusieurs alternatives selon la valeur de son argument.

Exemple 1. Soit f la fonction telle que $f(x) = 1$ si $x = 2$ et $f(x) = x^2$ si $x \neq 2$.

La définition de la fonction f comporte deux alternatives selon la valeur de x : la valeur de $f(x)$ est déterminée de manière différente si $x = 2$ et si $x \neq 2$.

Exemple 2. Soit f la fonction telle que $f(x) = x$ si x est un nombre rationnel et $f(x) = 0$ sinon.

La définition de la fonction f comporte deux alternatives selon la valeur de x : la valeur de $f(x)$ est déterminée de manière différente si est un nombre rationnel ou non.

Exemple 3. Soit f la fonction telle que $f(x) = 2x - 3$ si $x > 1$ et $f(x) = -x + 2$ si $x \leq 1$.

La définition de la fonction f comporte deux alternatives selon la valeur de x : la valeur de $f(x)$ est déterminée de manière différente si est un nombre rationnel ou non.

Note. Une fonction définie par partie est d'abord une *fonction*. Il doit y avoir au plus une valeur associée à une valeur donnée.

Exemple 4. La phrase suivante ne défini par une fonction : « Soit f la fonction telle que $f(x) = x + 2$ si $x > 1$ et $f(x) = 2x - 1$ si $x \leq 2$. »

Cela ne défini pas une fonction car plusieurs valeurs sont associées à la valeur $x = 2$. Comme $2 > 1$ on peut utiliser la première partie de la règle de définition, mais comme $2 \leq 2$ on peut aussi utiliser la seconde partie.

En utilisant la première partie on trouve que

$$f(2) = 2 + 2 = 4$$

mais en utilisant la seconde partie on trouve que

$$f(2) = 2(2) - 1 = 3.$$

Évaluer $f(2)$ ne devant donner au plus qu'une valeur, la phrase donnée ne défini pas une fonction.

2. Manière de définir une fonction par parties

2.1. Définition textuelle

On peut définir une fonction par partie à l'aide d'un texte la décrivant.

Exemple 5. Définition par texte : soit f la fonction telle que $f(x) = x^2$ si x est plus grand que 1, $f(x) = 2$ si $x = 1$ et $f(x) = 3x - 2$ si x est plus petit que 1.

Pour évaluer $f(2)$, on détermine si $x > 1$, $x = 1$ ou $x < 1$.

Les définitions textuelles sont plus facile à lire, mais sont généralement plus complexes à décoder et elles peuvent être ambigües si le texte est mal formulé.

2.2. Définition à l'aide de la notation d'Euler

Pour indiquer qu'une fonction est définie en utilisant différentes expression algébriques selon la valeur de l'argument, on utilise une accolade pour regrouper les différents cas et les conditions associées.

$$f(x) = \begin{cases} \text{Expression algébrique 1} & \text{Condition 1} \\ \text{Expression algébrique 2} & \text{Condition 2} \\ \text{Expression algébrique 3} & \text{Condition 3} \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

Exemple 6. Définition avec la notation d'Euler :

$$f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x > 2 \\ -2x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ 5-x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Note. Il peut y avoir autant de cas que nécessaire pour décrire la fonction.

Les conditions ne sont pas nécessairement des inégalités. On peut utiliser toute forme de proposition mathématique permettant de déterminer quelle partie de la définition doit être utilisée.

Question 1
Écrire les définitions suivantes en utilisant la notation d'Euler.

a) La fonction f qui associe à chaque nombre x son double si $x > 2$ et son triple sinon.

b) La fonction f qui associe à chaque nombre x son carré si le nombre est inférieur à 2, son double s'il est strictement compris entre 2 et 3 et son cube sinon.

Question 2
Déterminer lesquelles des définitions suivantes définissent des fonctions par parties.

a) $f(x) = x^3$

b) La règle qui associe à chaque nombre x son double si $x > 2$ et son triple sinon.

c) $f(x) = 2$ si $x = 0$, x^2 si $x - 2 > 1$ et $-x^2$ si $x - 2 \leq 1$.

d) $g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ -x+1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

3. Évaluation d'une fonction définie par parties

On évalue une fonction définie par partie en identifiant la partie de la définition devant être utilisée avec la valeur de l'argument de la fonction. On calcule ensuite la valeur de la fonction avec l'expression algébrique correspondante.
Exemple 7. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 2 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ -x^3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Évaluons $f(3)$. L'argument est 3 et $3 > 2$, la première partie de la définition s'applique et $f(3) = x^2 = 9$.

Évaluons $f(2)$. Comme $0 < 2 \leq 2$, la deuxième partie de la définition s'applique et $f(2) = 2$.

Évaluons $f(1)$. Comme $0 < 1 \leq 2$, la deuxième partie de la définition s'applique et $f(1) = 1$.

Évaluons $f(0)$. Comme $0 \leq 0$, la troisième partie de la définition s'applique et $f(0) = -(0)^3 = 0$.

Évaluons $f(-1)$. Comme $-1 \leq 0$, la troisième partie de la définition s'applique et $f(0) = -(0)^3 = 0$.

Question 3
Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{si } x > 1 \\ x+1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -x & \text{si x} < 0 \end{cases}$$

Déterminer les valeurs suivantes.

a) $f(2)$

b) $f\left(\frac{3}{2}\right)$

c) $f\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $f(0)$

e) $f\left(-\frac{1}{3}\right)$

f) $f(\pi)$

g) $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Note. Les fonctions utilisés dans les différentes parties de la définition d'une fonction définie par parties peuvent être de n'importe quel type : polynomiale, rationnelle, algébrique et même transcendante.
Exemple 8. La fonction suivante est définie à l'aide des fonctions trigonométriques.

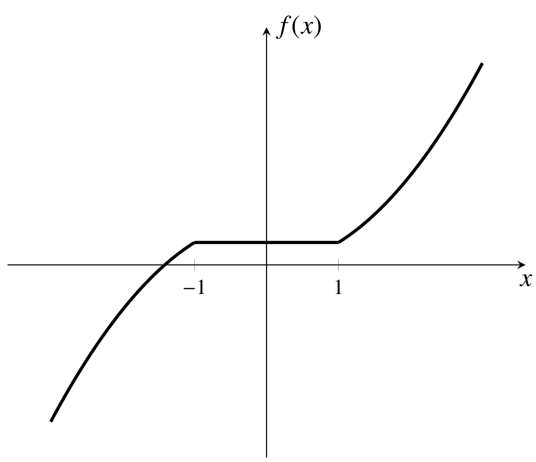
$$g(x) = \begin{cases} \sin(x) & \text{si } 0 \leq x < \pi \\ \cos(x) & \text{si } \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

4. Représentation graphique

Rappel : le graphe d'une d'une fonction f est l'ensemble des points du plan cartésien qui sont de la forme $(x, f(x))$. Une fonction a toujours un graphe, même s'il peut être difficile à représenter graphiquement.

Pour représenter une fonction définie par parties, on peut construire le graphe de chacune de ses parties.
Exemple 9. Représentons graphiquement la fonction f définie par

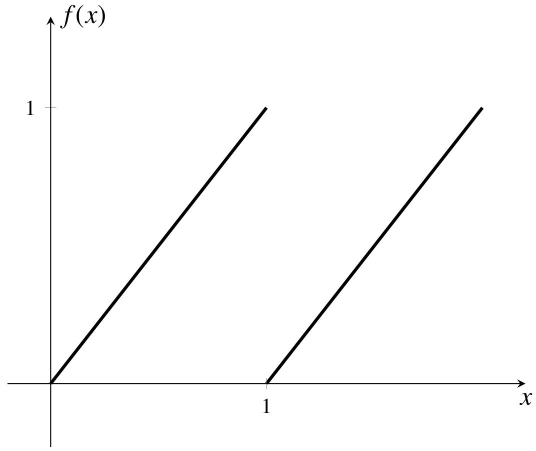
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2-x^2 & \text{si } x \leq -1 \end{cases}$$



Une telle représentation peut être ambigüe à la « jonction » de deux parties d'un graphique de fonction définie par parties, comme dans l'exemple suivant.

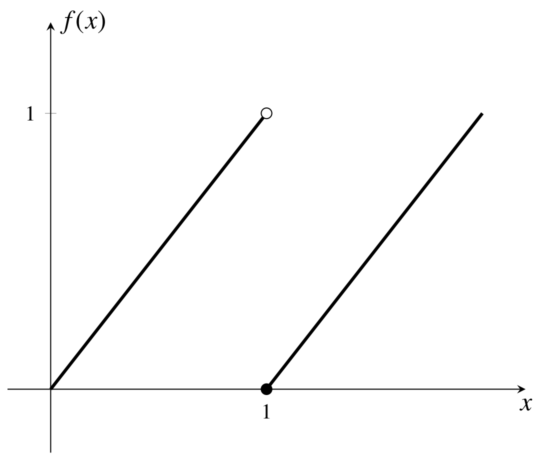
Voici une représentation graphique de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 1 \\ x - 1 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$



Cette représentation est ambigüe : comment déterminer la valeur de $f(1)$ à l'aide du graphique ? Cette valeur pourrait être 0 ou 1 selon la partie du graphe considérée.

Pour éviter cette ambigüité, on ajoute des points au bouts des différents segments de tels graphiques.



La convention est que la bonne valeur est indiquée par un *point plein*. Dans ce dernier graphique, on voit que $f(1) = 0$ car le point (1,0) est plein, et non que $f(1) = 0$ car le point en (1,1) est vide.

Question 4
Représenter graphiquement chacune des fonctions définies parties suivantes.

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercices supplémentaires

Question 5
Soit $f(x)$ la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x/2 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Évaluer les expressions suivantes.

a) $f(-1)$ b) $f(0)$ c) $f(1)$ d) $f(2)$

Question 6
Soit $f(x)$ la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 \\ x/2 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } 1 < x. \end{cases}$$

a) Quel est le domaine de la fonction ?
b) Quels sont les zéros de la fonction ? $x = 0$ est le seul zéro.
c) Quel est l'ordonnée à l'origine de la fonction ?

Question 7
Pour chacune des définitions suivantes, dire s'il s'agit d'une fonction et si ce n'est pas le cas, donner une valeur de x à laquelle correspond plusieurs valeurs de y.

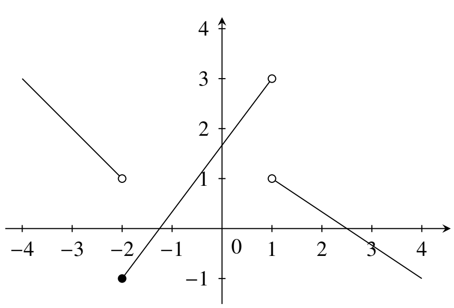
a) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < 3 \\ x-1 & \text{sinon} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 3 \\ x-1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 1 \\ x+1 & \text{si} x \geq 1 \end{cases}$

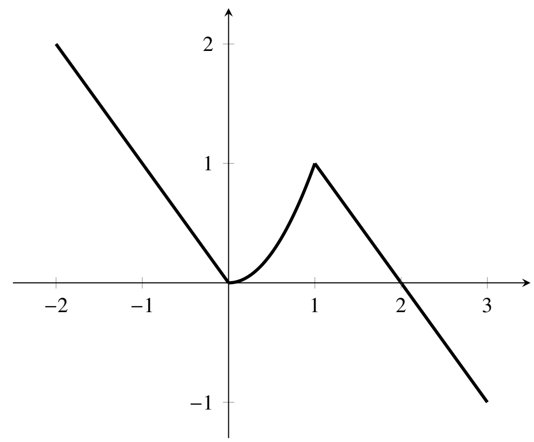
d) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \leq 2 \\ x+1 & \text{si} x \geq 1 \end{cases}$

Question 8
Soit la fonction $f(x)$ illustrée ci-dessous, déterminer :



a) $f(-4)$
b) $f(-2)$
c) $f(1)$
d) Le point $(-1, -1)$ appartient=il au graphe de la fonction ?

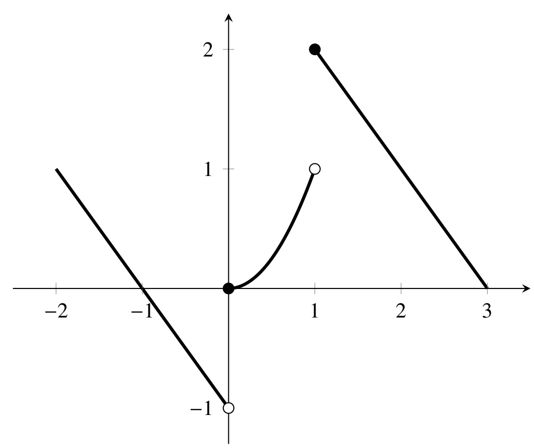
Question 9
Soit f la fonction définie par morceau ayant le graphe suivant :



Déterminer les valeurs suivantes, si elles sont définies.

a) $f(-1)$ b) $f(0)$ c) $f(1)$ d) $f(2)$

Question 10
Soit f la fonction définie par morceau ayant le graphe suivant :



Déterminer les valeurs suivantes, si elles sont définies.

a) $f(-1)$ b) $f(0)$ c) $f(1)$ d) $f(2)$

Solutions

Question 1

a) $f(x) = \begin{cases} 2x \text{ si } x > 2, \\ 3x \text{ sinon.} \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x \leq 2, \\ 3x \text{ si } 2 < x < 3, \\ x^3 \text{ si } 3 \leq x. \end{cases}$

Question 2

a) f est une fonction définie par parties. Une telle fonction peut n'avoir qu'une seule partie.

b) C'est une fonction définie par partie, car il y a deux cas différents : si $x > 2$ et si $x \leq 2$.

c) C'est une fonction définie par partie, car il y a trois cas différents.

d) g est une fonction définie par parties. Note : la fonction n'est pas définie pour la valeur $x = 1$, mais rien dans la définition de fonction définie par parties n'oblige qu'une telle fonction soit définie pour toutes les valeurs possibles de x.

Question 3

a) Comme $2 > 1$, la première partie de la définition s'applique et $f(2) = 1 - 2 = -1$.

b) Comme $\frac{3}{2} > 1$, la première partie de la définition s'applique et $f\left(\frac{3}{2}\right) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$.

c) Comme $0 \leq \frac{1}{2} < 1$, la deuxième partie de la définition s'applique et $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

d) Comme $0 \leq 0 < 1$, la deuxième partie de la définition s'applique et $f(0) = 0 + 1 = 1$.

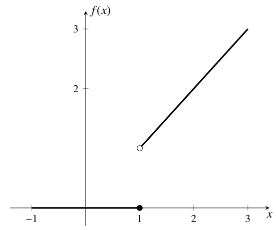
e) Comme $-\frac{1}{3} < 0$, la troisième partie de la définition s'applique et $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$.

f) Comme $1 < \pi$, la première partie de la définition s'applique et $f(\pi) = 1 - \pi$.

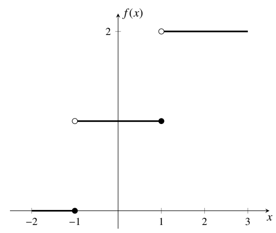
g) Comme $0 \leq \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, la deuxième partie de la définition s'applique et $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + 1 = \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

Question 4

a)



b)



Question 5

a) $f(-1) = -(-1) = 1$

b) $f(0) = 1$

c) $f(1) = 1/2$

d) $f(2) = 2/2 = 1$

Question 6

a) $\mathbb{R}$

b) $f(0) = 0/2 = 0$

Question 7

a) f est une fonction.

b) f n'est pas une fonction : $f(3) = 4$ ou $f(3) = 2$ car deux conditions sont satisfaites.

c) f est une fonction : même si les deux conditions peuvent être appliquée en $x = 1$, les deux valeurs de y sont les même : $f(1) = 2(1) = 2$ ou $f(1) = (1) + 1 = 2$

d) f est n'est pas fonction : la définition donne deux valeurs différentes pour $1 \leq x \leq 2$. Par exemple, en $x = 2$, on a $f(2) = 2(2) = 4$ dans le premier cas et $f(2) = 2 + 1 = 3$ dans le deuxième.

Question 8

a) 3

b) -1

c) n'existe pas

d) Non

Question 9

a) $f(-1) = 1$

b) $f(0) = 0$

c) $f(1) = 1$

d) $f(2) = 0$

Question 10

a) $f(-1) = 1$

b) $f(0) = 0$

c) $f(1) = 1$

d) $f(2) = 0$