Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent

Fonctions exponentielles

1. Fonctions exponentielles

1.1. Fonctions exponentielles à base quelconque

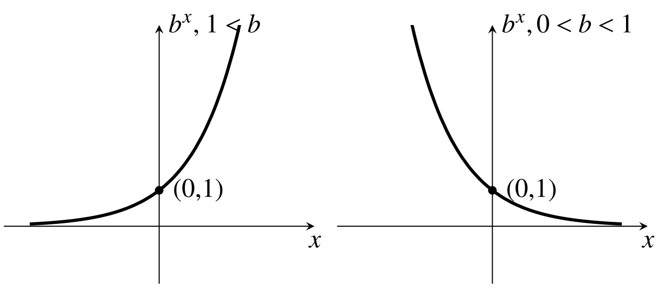
Définition. La **fonction exponentielle à base** b ($b > 0$, $b \neq 1$) est définie par

$$f(x) = b^x$$

Note. Bien qu'il soit possible de définir une fonction par $f(x) = b^x$ peu importe la valeur de b, le comportement d'une telle fonction est très différent si la base b est négative. Pour cette raison, on nomme ces fonctions à base b positive ayant des caractéristiques comparables entre elles « fonctions exponentielles ».

1.2. Graphe de la fonction exponentielle

C'est une fonction croissante si $b > 1$ et décroissante si $b < 1$.



Proposition 1. La fonction exponentielle de la forme b^x a les propriétés suivantes.

- elle est toujours strictement positive :

$$b^x > 0 \text{ pour tout } x.$$

- elle n'a aucun zéro
- elle a une asymptote horizontale dont l'équation est $y = 0$
- elle est croissante si $1 < b$ et décroissante si $0 < b < 1$
- son domaine est toujours $\mathbb{R}$.

x	0	1	2	3
2^x	1	2	4	8

Question 1
Est-ce que les fonctions suivantes sont des fonctions exponentielles ? Si c'est le cas, donner la valeur de la base b et dire si c'est une fonction croissante ou décroissante.

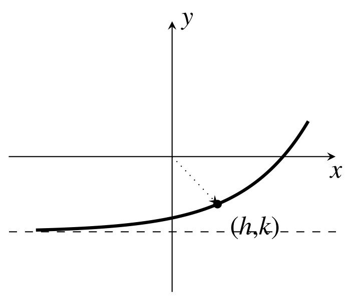
a) $f(x) = 5^x$
b) $f(x) = 1^x$
c) $f(x) = 10^x$
d) $f(x) = \dfrac{1}{5^x}$
e) $f(x) = \left(\dfrac{1}{7}\right)^x$
f) $f(x) = 0{,}43^x$
g) $f(x) = 1{,}01^x$

2. Fonctions exponentielles généralisés

On appelle aussi **fonction exponentielle généralisée** toute fonction obtenue en appliquant des translations, des dilatations et des symétries par rapports aux axes de coordonnées à une fonction exponentielle.

Proposition 2. La fonction obtenue en appliquant des translations, des dilatations et des symétries par rapports aux axes de coordonnées à une fonction exponentielle peut toujours s'écrire de la manière suivante.

$$f(x) = Ab^{x-h} + k.$$



Note. L'effet d'une translation de h parallèle aux abscisses est le même qu'une dilatation de facteur b^{-h} parallèle aux ordonnées :

$$b^{x-h} = b^x b^{-h} = b^{-h} b^x = Ab^x.$$

On utilise donc rarement le paramètre h pour décrire les fonctions exponentielles.
Note. La base b peut être exprimée de différente manière équivalentes. Par exemple :

$$\frac{1}{2^x} = 2^{-x} = (\frac{1}{2})^x.$$

Définition. On appelle la forme $Ab^x + k$ la **forme canonique** de la définition d'une fonction exponentielle généralisée.

Question 2
Écrire les fonction exponentielles suivantes sous la forme canonique.

a) $f(x) = \dfrac{1}{5^x}$

b) $f(x) = 2^{x-3}$

c) $f(x) = 10^{-x} + 1$

d) $f(x) = \dfrac{3}{5^{x-1}}$

2.1. Domaine

Proposition 3. Le domaine d'une fonction exponentielle est l'ensemble des réels.

2.2. Asymptotes

Proposition 4. La fonction exponentielle définie par $f(x) = Ax^x + k$ a comme asymptote horizontale la droite d'équation $y = k$.

Exemple 1. Déterminons l'équation de l'asymptote horizontale de la fonction $f(x) = 5\dfrac{1}{2^x} + 2$.

La forme canonique de la définition de f est

$$f(x) = 5\frac{1}{2^x} + 2 = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x + 2.$$

On a donc que $k = 2$. L'équation de l'asymptote horizontale est donc

$$y = 2.$$

Exemple 2. Déterminons l'équation de l'asymptote horizontale de la fonction $f(x) = -10^x$.

La forme canonique de la définition de f est

$$f(x) = (-1)10^x + 0.$$

On a donc que $k = 0$. L'équation de l'asymptote horizontale est donc

$$y = 0.$$

Question 3
Trouver l'équation de l'asymptote horizontale des fonctions exponentielles suivantes.

a) $f(x) = 10 \cdot 3^x + 1$

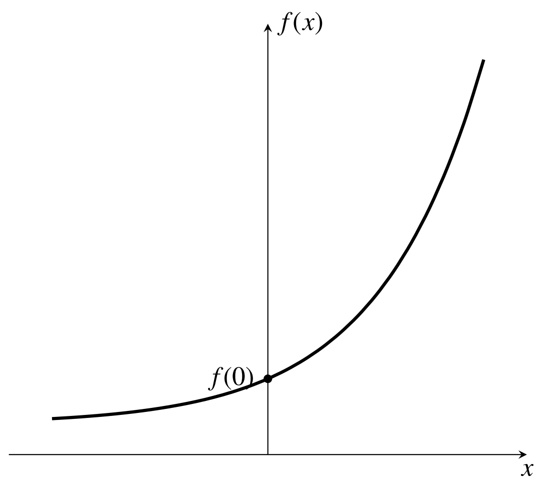
b) $f(x) = 2^x$

c) $f(x) = -5 \cdot 10^x - \frac{3}{4}$

d) $f(x) = \sqrt{2} \cdot 2^x + \sqrt{3}$

2.3. Ordonnées à l'origine

Proposition 5. L'ordonnée à l'origine d'une fonction exponentielle est la valeur de $f(0)$. C'est le point de croisement avec l'axe des ordonnées.



Note. Pour déterminer l'ordonnée à l'origine d'une fonction exponentielle, il faut utiliser l'identité $b^0 = 1$.
Exemple 3. L'ordonnée à l'origine de $f(x) = 2^x - 3$ est $f(0) = 2^0 - 3 = 1 - 3 = -2$.

L'ordonnée à l'origine de $f(x) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$ est $f(0) = 5\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 1 = 5(1) + 1 = 6$.

Question 4
Déterminer l'ordonnée à l'origine des fonctions exponentielles suivantes.

a) $f(x) = 10^x$

b) $f(x) = -2^x + 4$

c) $f(x) = \frac{1}{2^x} - 1$

d) $f(x) = -\sqrt{2} \cdot 3^x + \sqrt{2}$

2.4. Zéros

Note. L'équivalence suivante permet de résoudre une équation où la variable à déterminer est en exposant. Elle permet de passer de la forme *exponentielle* d'une équation à la forme *logarithmique*.

$$b^A = C \iff A = \log_b(C).$$

Note. Une puissance d'une base b positive est toujours strictement positive :

$$b^x > 0.$$

Une équation de la forme $b^x = P$ n'a donc pas de solution si $P \leq 0$.

Question 5
Déterminer les zéros des fonctions exponentielles suivantes.

a) $f(x) = 2^x - 1$

b) $g(x) = 3 \cdot 10^x - 1$

c) $h(x) = 10^x - 100$

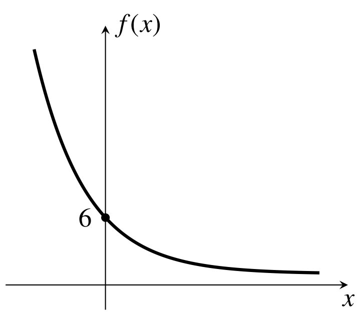
d) $f(x) = 2^x + 1$

Exemple 4. Déterminons le graphe de la fonction définie par $Q(t) = 5 \cdot \frac{1}{2^2} + 1$.

On met la définition de la fonction sous forme canonique :

$$Q(t) = 5 \cdot \frac{1}{2^2} + 1 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t + 1.$$

Les paramètres de la fonction sont $A = 5$, $b = \frac{1}{2}$, $h = 0$ et $k = 1$. Comme $0 < b < 1$, la fonction est décroissante, comme $k = 1$, la fonction pour asymptote horizontale la droite d'équation $x = 1$.



3. Applications

3.1. Intérêts composés

Exemple 5. Un prêt étudiant d'un montant inital de 10 000 $ augmente à un taux de 1 % par année.

Exprimons la dette après t années. Comme le montant de la dette augment de 1 % par année, si on doit à un moment donnée un montant M, l'année suivante on doit un montant $M + 0{,}01M = 1{,}01M$. Après deux années, on doit $M(1{,}01)(1{,}01) = M(1{,}01)^2$, après trois années, on doit $M(1{,}01)(1{,}01)(1{,}01) = M(1{,}01)^3$.

Le montant dû après t année est donc $M(1{,}01)^t$. Comme le montant initial est 10 000, après t annéeson on doit

$$10\,000(1{,}01)^t.$$

3.2. Demie-vie

Exemple 6. On a 100 kg d'une substance radioactive. La quantité Q d'une substance radioactive diminue de moitié à toute les 5 h. Après t heures, la quantité restante de la substance est

$$Q(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5}.$$

Déterminons après combien de temps il reste uniquement 10 kg de la substance. On veut t tel que $Q(t) = 10$.

$$\begin{aligned}
Q(t) &= 10 \\
100\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5} &= 10 \\
\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5} &= \frac{1}{10} \\
\frac{1}{2^{t/5}} &= \frac{1}{10} \\
2^{t/5} &= 10 \\
\frac{t}{5} &= \log_2(10) \\
t &= 5\log_2(10) \\
&\approx 16.6\,\text{h}.
\end{aligned}$$

Exercices supplémentaires

Question 6
Évaluer les fonctions exponentielles suivantes aux points donnés.

a) $f(x) = 2^x$ en $x = -3$
b) $f(x) = 2^{-x}$ en $x = -3$
c) $f(x) = 4^x$ en $x = \frac{1}{2}$
d) $f(x) = 4^x$ en $x = -\frac{1}{2}$
e) $f(x) = 5^x$ en $x = \log_5(3)$
f) $f(x) = 3^x$ en $x = \log_3(x)$
g) $f(x) = 5^{x+3}$ en $x = -3$
h) $f(x) = 5^{x-3}$ en $x = 2$

Question 7
Mettre la définition des fonctions exponentielle suivantes sous la forme canonique $f(x) = Ab^x + k$.

a) $f(x) = 10^{2x}$
b) $f(x) = 5^x 5^{3x}$
c) $f(x) = 2^{3x+4}$
d) $f(x) = 7^{-x}$
e) $f(x) = 3^{-4x-2}$
f) $f(x) = 3^{-2x} 3^{x+1}$
g) $f(x) = 10^{x/3}$
h) $f(x) = 3^{\frac{-4x-2}{5}}$
i) $f(x) = \left(\sqrt{5}\right)^{2x}$

Question 8
Déterminer la fonctions exponentielle de la forme $f(x) = Ab^x$ qui passe par les points suivants. Esquissez le graphique de la fonction.

a) (0,1) et (1,2)
b) (0,2) et (3,4)
c) (0, – 1) et (1,2)
d) (0,2) et (1,1)
e) (0, – 3) et (2, – 1)

Question 9
Esquisser le graphique des fonctions suivantes. Donner les points de croisement avec les axes.

a) $f(x) = 10^{2x} - 1$
b) $f(x) = 1 - 2^x$
c) $f(x) = -2 \cdot 3^{x-1}$
d) $f(x) = 5^{-x} - 2$
e) $f(x) = -3^{1/3-x} + 3$

Question 10
Transformer les descriptions suivantes en définitions algébriques de fonctions exponentielles.

a) Une quantité est initialement dix et double à chaque heure.
b) Une quantité est initialement dix et diminue de moitié à chaque heure.
c) Une quantité est initialement 2 et triple à chaque semaine.
d) Une quantité est initialement d'une demie et double à chaque seconde.
e) Un volume est initialement 100 et diminue d'un dixième à chaque jour.
f) Un volume est initialement d'un dixième et diminue d'un quart à chaque jour.
g) Une masse est initialement 5 et diminue du tiers à chaque heure.
h) Une surface est initialement de 17 et augmente de 1% à chaque jour.
i) Une surface est initialement de 12 et diminue de 3% à chaque jour.
j) Une longueur est initialement de 10 et augmente de sa moitiée à chaque minute.

Applications

Question 11
Un étudiant québécois a en moyenne une dette d'étude de 10000 \$ à la fin d'un baccalauréat. Si le taux d'intérêt appliqué à un prêt étudiant est de 12% par année capitalisé à chaque mois, dire combien doit l'étudiant après 1 an, 5 ans et 10 ans s'il n'effectue aucun paiement de remboursement. Comparer avec le capital après 1, 5 et 10 ans si la capitalisation est annuelle (arrondir les réponses au dollar prêt). Après combien de mois le capital à rembourser va-t-il doubler ?

Question 12
Le taux d'intérêt maximum permis par la loi est de 50 % par année. Quel est le montant qui devra vous être remboursé après 1, 5 et 10 ans si vous prêtez 1000 \$ à quelqu'un à taux de 50 % par année, capitalisé mensuellement ? Après combien de mois le montant va-t-il doubler ?

Question 13
La loi canadienne impose de publier les taux d'intérêts sous forme de pourcentage annuel. Un prêteur sur gages affiche illégalement un taux d'intérêt mensuel de 5%. Quel est le taux d'intérêt annuel correspondant ?

Question 14
Le delbecquium 402 est radioactif : un bloc de cette matière se transforme spontanément en une autre forme de matière après un certain temps. On a mesuré qu'un cinquième d'un bloc de delbecquium 402 pur se transforme chaque 24 heures.

a) Donner la règle de correspondance donnant la quantité $M(n)$ de delbecquium 402 après n jours, sachant que l'on commence l'expérience avec 25 g.
b) Déterminer après combien de jours il restera seulement 1 g de la masse initiale.

Question 15
Votre professeur de mathématique a placé un capital de 1 500 000 $ à un taux annuel de 12 %, capitalisé à chaque mois.

a) Donner la règle de correspondance donnant le capital total après n mois.
b) Déterminer après combien d'années le montant placé aura doublé. (Exprimer la réponse à l'aide de logarithmes en base 10)
c) Votre généreux professeur voudrait utiliser ce capital pour donner 50 000 $ à chacun de ses 50 étudiants en architecture pour les aider à poursuivre leur études. Combien de temps faudra-t-il pour que le capital placé soit suffisant pour lui permettre de le faire ? (Exprimer la réponse à l'aide de logarithmes en base 10)

Question 16
Un breuvage est à une température initiale de 25 °C. Sa température décroit exponentiellement jusqu'à une température de 15 °C en 12 h. Donner une fonction exponentielle décrivant la température en fonction du temps en heures.

Électronique

Question 17
Si un condensateur est initialement déchargé, la charge, en coulombs, accumulée sur les armatures du condensateur, t secondes après la fermeture de l'interrupteur, est donnée par :

$$q(t) = CV\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right).$$

Un circuit contient une source de tension de 100 V, une résistance de 100 kΩ et un condensateur d'une capacité de 0.01 µF.

a) Calculer la charge accumulée à :
   i) $t = 0$ ms
   ii) $t = 1$ ms
   iii) $t = 2$ ms
b) À quel moment la charge est-elle de 980 nC ?

Question 18
Si un condensateur est initialement déchargé, la tension à ses bornes, t secondes après la fermeture de l'interrupteur, est donnée par :

$$v_C(t) = V\left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right).$$

La tension aux bornes de la résistance au même instant t est donnée par :

$$v_R(t) = Ve^{\frac{-t}{RC}}.$$

De plus, $v_C(t) + v_R(t) = V$ pour tout t. Un circuit contient une source de tension de 100 V, une résistance de 2.2 kΩ et un condensateur d'une capacité de 1 μF initialement déchargé.

a) Calculer la tension aux bornes du condensateur après 2m̃s.

b) À quel moment la tension aux bornes du condensateur est de 80 V ?
c) À quel moment la tension aux bornes de la résistance est-elle de 40 V ?

Solutions

Question 1

a) oui, $b = 5$, croissante
b) Non, $b = 1$
c) oui, $b = 10$, croissante
d) oui, $b = \frac{1}{5}$ car $\frac{1}{5^x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, décroissante
e) oui, $b = \frac{1}{7}$, décroissante
f) oui, $b = 0{,}43$, décroissante
g) oui, $b = 1{,}01$, décroissante

Question 2

a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.
b) $f(x) = 2^x 2^{-3} = \left(\frac{1}{8}\right)2^x$.
c) $f(x) = \left(\frac{1}{10}\right)^x + 1$.
d) $f(x) = 3\left(5^{-x}5^1\right) = 15\left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Question 3

a) $y = 1$
b) $y = 0$
c) $y = -\frac{3}{4}$
d) $y = \sqrt{3}$

Question 4

a) $10^0 = 1$
b) $-2^0 + 4 = -1 + 4 = 3$
c) $-2^0 + 4 = \frac{1}{2^0} - 1 = \frac{1}{1} - 1 = 0$
d) $-\sqrt{2}\cdot 3^0 + \sqrt{2} = -\sqrt{2}(1) + \sqrt{2} = 0$

Question 5

a) $x = 0$
b) $x = \log\left(\frac{1}{3}\right)$
c) $x = 3$
d) $f(x) = 0 \iff 2^x + 1 = 0 \iff 2^x = -1$. Cette dernière équation n'a pas de solution, la fonction f n'a donc pas de zéros.

Question 6

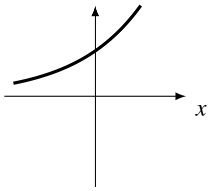
a) $f(-3) = -\frac{1}{8}$
b) $f(-3) = 8$
c) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$
d) $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$
e) $f(3) = 5^{\log_5(3)} = 3$
f) $f(\log_3(x)) = x$
g) $f(-3) = 5^{-3+3} = 5^0 = 1$
h) $f(2) = 5^{2-3} = 5^-1 = \frac{1}{5}$

Question 7

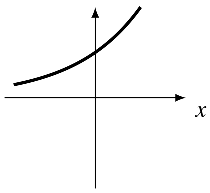
a) $f(x) = 100^x$
b) $f(x) = 625^x$
c) $f(x) = 16\cdot 8^x$
d) $f(x) = (1/7)^x$
e) $f(x) = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{81}\right)^x$
f) $f(x) = 3\left(\frac{1}{3}\right)^x$
g) $f(x) = \left(\sqrt[3]{10}\right)^x$
h) $f(x) = \frac{1}{3^{2/5}}\left(\frac{1}{3^{4/5}}\right)^x$
i) $f(x) = 5^x$

Question 8

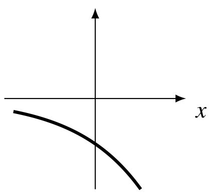
a) $f(x) = 2^x$



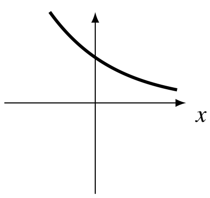
b) $f(x) = 2 \cdot \left(\sqrt[3]{2}\right)^x$



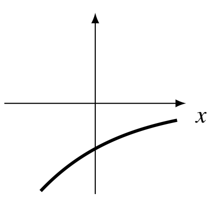
c) $f(x) = -2^x$



d) $f(x) = (1/2)^x$

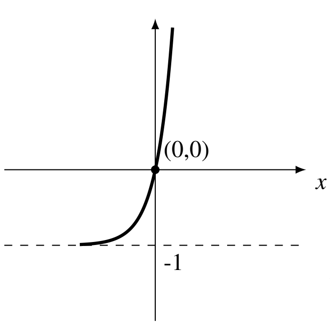


e) $f(x) = (-3)\left(1/\sqrt{3}\right)^x$

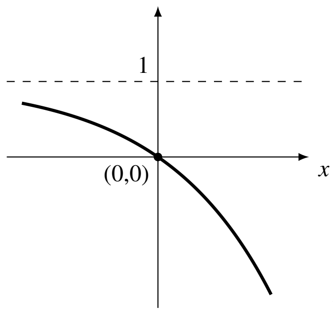


Question 9

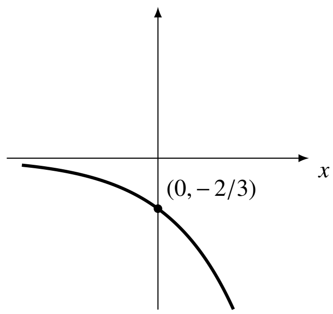
a)



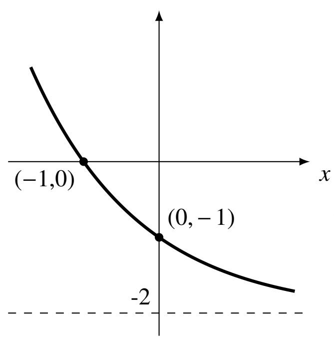
b)



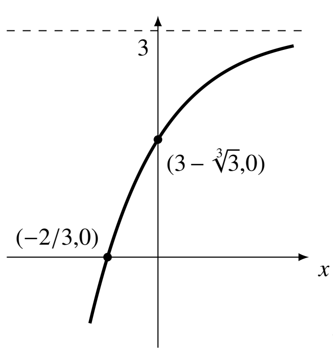
c)



d)



e)



Question 10

a) $Q(t) = 10 \cdot 2^t$

b) $Q(t) = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t$

c) $Q(t) = 2 \cdot 3^t$

d) $Q(t) = \frac{1}{2} \cdot 2^t$

e) $V(t) = 100 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^t$

f) $V(t) = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^t$

g) $M(t) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^t$

h) $S(t) = 17 \cdot \left(\frac{101}{100}\right)^t$

i) $S(t) = 17 \cdot \left(\frac{97}{100}\right)^t$

j) $S(t) = 10 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^t$

Question 11

1 an	11 268 ;$
5 ans	18 167 ;$
10 ans	33 004 ;$

La dette de l'étudiant double après

$$\frac{\log(2)}{\log(1.01)} \simeq 70 \text{ mois.}$$

Question 12

1 an	1632 $
5 ans	11580 $
10 ans	134107 $

Le montant double après 17 mois.

Question 13

60 %.

Question 14

a) $M(n) = 25\left(\frac{1}{5}\right)^n$

b) $n = 2$

Question 15

a) $C(n) = 1500000 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^n$

b) $n = -\frac{\log(2)}{2}$

c) $n = -\frac{\log(5/3)}{2}$

Question 16

La fonction cherchée doit être de la forme $T(t) = 25b^t$. On sait qu'après 12 h, on doit avoir

$$T(12) = 15,$$

c'est à dire

$$25b^{12} = 15.$$

On isole b dans cette dernière relation :

$$\begin{aligned} 25b^{12} &= 15 \\ b^{12} &= \frac{15}{25} \\ b^{12} &= \frac{3}{5} \\ b &= \sqrt[12]{\frac{3}{5}} \\ &\approx 0{,}958 \end{aligned}$$

Question 17

a) i) 0 nC
ii) 632.121 nC
iii) 864.664 nC

b) $t = -\ln 0.2$ ms

Question 18

a) 59.711 V

b) $t = -2.2 \ln 0.2$ ms

c) $t = -2.2 \ln 0.4$m̃s