Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent

Fonctions sinusoïdales

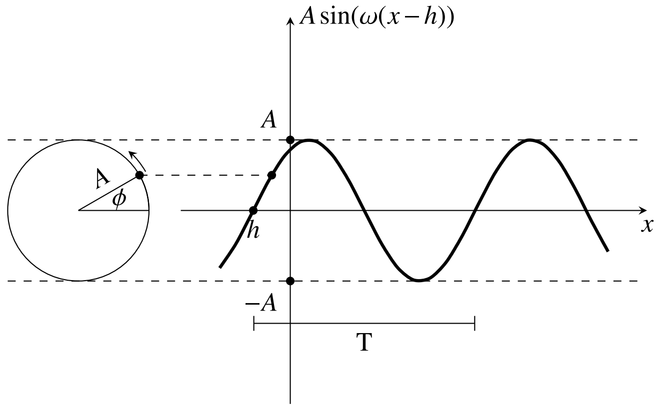
1. Forme générale d'une fonction sinusoïdale

Définition. Une fonction sinusoïdale est une fonction réelle définie par une expression de la forme

$$f(t) = A\sin(\omega(t-h)) + k.$$

Forme générale :

$$\begin{aligned} f(t) &= A\sin(\omega(t-h)) + k && \text{Déphasage temporel} \\ &= A\sin(\omega t + \phi) + k && \text{Déphasage angulaire} \end{aligned}$$



dom$(f) = \mathbb{R}$
Amplitude : A
Vitesse angulaire $\omega = 2\pi f$
Période : $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

Fréquence : $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$
Déphasage (temps) : $h = -\dfrac{\phi}{\omega}$
Déphasage (angle) : $\phi = -\omega h$
ϕ est l'angle initial

1.1. Période et fréquence

Exemple 1. La période de la fonction sinusoïdale $f(t) = \sin(\pi t)$ est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2.$$

La fréquence est $\dfrac{1}{T} = \frac{1}{2}$.

Exemple 2. La période de la fonction sinusoïdale $f(t) = \sin(8t)$ est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$$

La fréquence est $\frac{1}{T} = \frac{4}{\pi}$.

Question 1
Déterminer la période et la fréquence des fonctions sinusoïdales suivantes.

a) $\sin(4t)$ b) $\sin(2x)$ c) $\sin\left(\frac{t}{3}\right)$ d) $\sin(5x)$

1.2. Subdivisions de la période

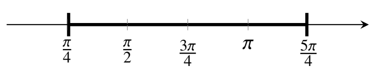
Exemple 3. Représenter un intervalle débutant à la valeur $x = -\frac{\pi}{4}$ et de longueur π. Diviser cet intervalle en quatre parties égales.

La longueur de l'intervalle étant π, chacune des quatre parties doit être de longueur $\frac{\pi}{4}$.

On calcule les cinq valeurs délimitant chaque quart de l'intervalle :

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{4}\\
&\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}\\
&\frac{2\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}\\
&\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}=\pi\\
&\frac{4\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}.
\end{aligned}$$

On représente enfin l'intervalle subdivisé :



Question 2
Représenter un intervalle débutant à la valeur $t = h$ et de longueur T. Diviser cet intervalle en quatre parties égales.

a) $h = 0$ et $T = 12$.
c) $h = 0$ et $T = 4\pi$.
b) $h = 1$ et $T = 12$.
d) $h = -\frac{\pi}{4}$ et $T = \pi$.

Exemple 4. Faisons le graphe de la fonction définie par

$$f(t) = 2\sin\left(2\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)+1$$

L'amplitude est $A = 2$. Comme la valeur centrale est k, les valeurs de la fonction vont de $k - A = 1 - 2 = -1$ à $k + A = 1 + 23$.

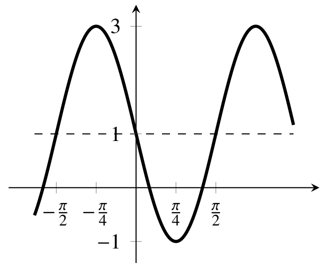
La vitesse angulaire est $\omega = 2$. La période est donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Le déphasage est $h = -\frac{\pi}{2}$ et donc le déphasage angulaire est est $\phi = -\omega h = -(2)\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi$.

Les quatre quart de périodes à partir de $t = h$ sont déterminés en additionnant quatre fois un quart de la période, soit $\pi 4$. Les valeurs sont

$$-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}.$$

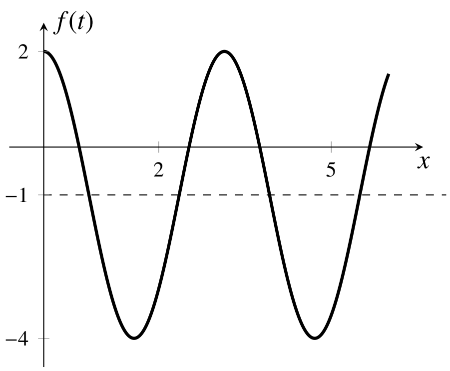


Question 3
Déterminer la période, la fréquence, le déphasage, l'amplitude de la fonction suivante et en faire une esquisse montant les coordonnées en t à chaque quart d'une période.

$$f(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}(t+1)\right) + 1$$

1.3. Détermination d'une fonction sinusoïdale à partir de son graphe

Exemple 5. Déterminons la forme générale de la fonction sinusoïdale ayant le graphe suivant.

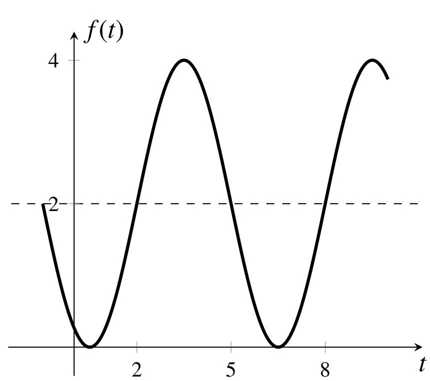


L'amplitude est $A = \frac{2-(-4)}{2} = 3$.

La période est $5-2 = 3$. La vitesse angulaire est donc $\omega = \frac{2\pi}{3}$.

$$f(t) = 3\sin\left(2\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right) - 1.$$

Question 4
Déterminer la fonction de la forme $f(t) = A\sin(\omega(t-h)) + k$ qui est représentée dans le graphe suivant.



Exercices supplémentaires

Question 5
Déterminer la période et la fréquence des fonctions sinusoïdales suivantes.

a) $\sin(4x)$

b) $\sin(6x)$

c) $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)$

d) $\sin\left(\dfrac{2x}{3}\right)$

e) $\sin(\pi x)$

f) $\sin(3\pi x)$

g) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$

h) $\sin(8x+4)$

i) $\sin(6x-8)$

j) $\sin(10(x-3))$

k) $\sin\left(\dfrac{2(x+4)}{3}\right)$

Question 6
Représenter un intervalle débutant à la valeur $x = h$ et de longueur T. Diviser cet intervalle en quatre parties égales.

a) $h = 2$ et $T = 8$.

b) $h = 1$ et $T = 12$.

c) $h = 0$ et $T = 6$.

d) $h = 2$ et $T = 6$.

e) $h = 1$ et $T = \frac{1}{3}$.

f) $h = 0$ et $T = \pi$.

g) $h = \dfrac{\pi}{4}$ et $T = \pi$.

h) $h = 0$ et $T = 3\pi$.

Question 7
Déterminer la période, la fréquence, le déphasage et l'amplitude de la fonction f et en faire une esquisse montrant les coordonnées en t à chaque quart d'une période.

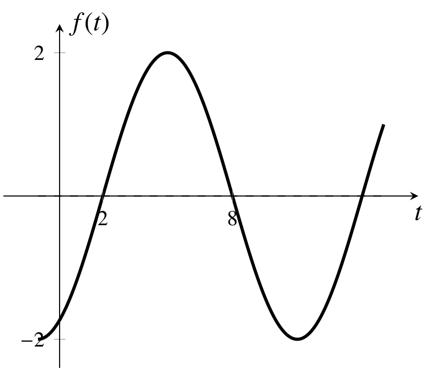
a) $f(t) = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}t\right)$

b) $f(t) = 2\sin(\pi(t+1))$

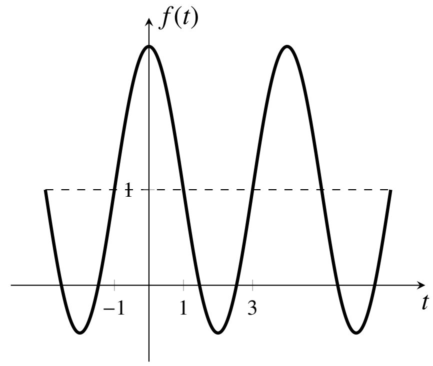
c) $f(t) = 3\sin\left(\dfrac{\pi}{6}(t-3)\right) - 2$

Question 8
Déterminer la fonction de la forme $f(t) = A\sin(\omega(t-h)) + k$ qui est représentée par chacun des graphes suivants.

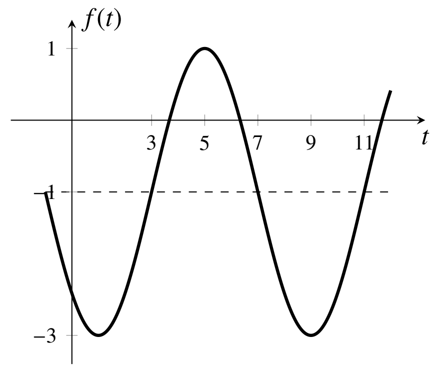
a)



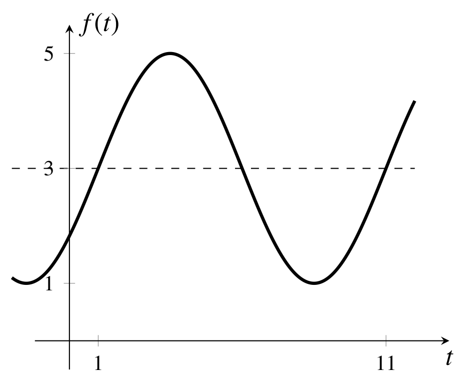
b)



c)



d)



Question 9
Soit $f(t) = 4\sin\left(3t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

a) Donner l'amplitude de cette fonction.

b) Donner la période de cette fonction.

c) Donner la fréquence de cette fonction.

d) Donner le déphasage de cette fonction.

e) Évaluer $f\left(\dfrac{7\pi}{9}\right)$.

Solutions

Question 1

a) $T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{2}{\pi}$

b) $T = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{\pi}$

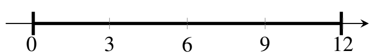
c) $T = \dfrac{2\pi}{1/3} = 6\pi$

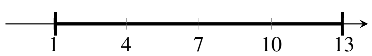
$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{6\pi}$

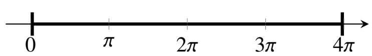
d) $T = \dfrac{2\pi}{5}$

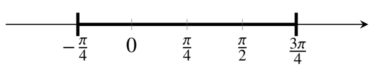
$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{5}{2\pi}$

Question 2

a)


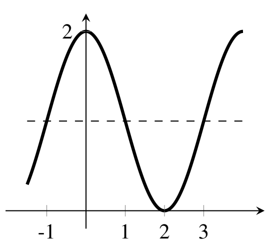
b)


c)


d)


Question 3

Période $T = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$,
fréquence $f = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$,
déphasage temporel $h = -1$,
amplitude $A = 1$.



Question 4

La période est $T = (8 - (2)) = 6$, donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{3}$. Le déphasage est $h = 2$. L'amplitude est $\frac{4-0}{2} = 2$ et $k = 2$. La fonction est donc

$$f(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{3}(t-2)\right) + 2.$$

Question 5

a) $T = \dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{\pi}{2}$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{2}{\pi}$

b) $T = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{3}{\pi}$

c) $T = \dfrac{2\pi}{1/2} = 4\pi$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{4\pi}$

d) $T = \dfrac{2\pi}{2/3} = 3\pi$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{3\pi}$

e) $T = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2}$

f) $T = \dfrac{2\pi}{3\pi} = \dfrac{2}{3}$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{3}{2}$

g) $T = \dfrac{2\pi}{\pi/2} = 2\pi\dfrac{2}{\pi} = 4$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{4}$

h) $T = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{4}{\pi}$

i) $T = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$

$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{3}{\pi}$

j) $T = \dfrac{2\pi}{10} = \dfrac{\pi}{5}$

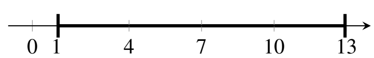
$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{5}{\pi}$

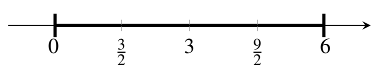
k) $T = \dfrac{2\pi}{2/3} = 2\pi\dfrac{3}{2} = 3\pi$

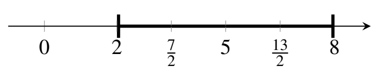
$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{3\pi}$

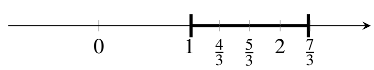
Question 6

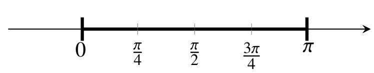
a)

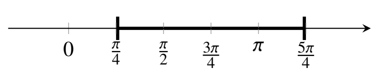

b)


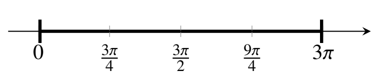
c)


d)


e)


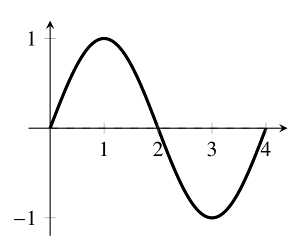
f)


g)


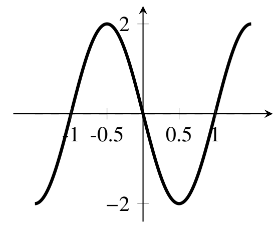
h)


Question 7

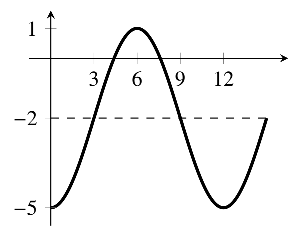
a) Période $T = \dfrac{2\pi}{\pi/2} = 4$,
fréquence $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{4}$,
déphasage temporel $h = 0$,
amplitude $A = 1$.



b) Période $T = \dfrac{2\pi}{\pi} = 2$,
fréquence $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2}$,
déphasage temporel $h = -1$,
amplitude $A = 2$.



c) Période $T = \dfrac{2\pi}{\pi/6} = 12$,
fréquence $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{12}$,
déphasage temporel $h = +3$,
amplitude $A = 3$.



Question 8

a) La période est $T = 2 \cdot 6 = 12$, donc $\omega = \dfrac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.
Le déphasage est $h = 2$.

L'amplitude est $A = 2$ et la valeur moyenne vaut $k = 0$. Ainsi,

$$f(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}(t-2)\right).$$

b) La période est $T = 4$ et donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Le déphasage est $h = -1$. L'amplitude est $A = 1.5$ et la valeur moyenne vaut $k = 1$. Ainsi,

$$f(t) = 1.5\sin\left(\frac{\pi}{2}(t+1)\right) + 1.$$

c) La période est $T = 8$. On a donc que $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$.

Le déphasage est $h = 3$.

L'amplitude est $A = 2$ et la valeur moyenne vaut $k = -1$. Ainsi,

$$f(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}(t-3)\right) - 1.$$

d) La période est $T = \frac{2\pi}{\pi/5} = 10$, donc $\omega = \frac{\pi}{5}$. Le déphasage est $h = 1$. L'amplitude est $A = 2$ et la valeur moyenne vaut $k = 3$. Ainsi,

$$f(t) = 2\sin\left(\frac{\pi}{5}(t-1)\right) + 3.$$

Question 9

a) 4

b) $\dfrac{2\pi}{3}$

c) $\dfrac{3}{2\pi}$

d) $\dfrac{\pi}{3}$

e) $2\sqrt{3}$