Yannick Delbecque — Département de mathématiques, Cégep de Saint-Laurent
Mathématiques pour l'électronique 1 — 201-71E-SL — A2025

Identités trigonométriques

1. Identité trigonométrique

Définition. Une **identité trigonométrique** est une égalité impliquant des fonctions trigonométrique qui est vrai pour toutes les valeurs possibles des angles impliquées

Exemple 1. L'égalité

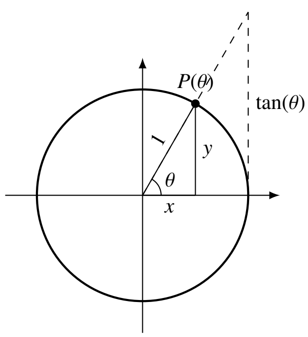
$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

est une identité trigonométrique.

Les identités trigonométriques sont toujours vraie à cause de relations géométriques pouvant être vérifiées dans le cercle trigonométrique et à l'aide des définitions des fonctions trigonométriques.

Cercle trigonométrique

Rappel. La définition des fonctions trigonométriques est données par le cercle trigonométrique de la manière suivante.



$$\cos(\theta) = x$$
$$\sin(\theta) = y$$
$$\tan(\theta) = \frac{y}{x} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\tan(\theta)}{1}$$

La définition de la fonction tangente est une première identité trigonométrique.

Proposition 1.

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

On peut utiliser des identités trigonométriques connues et les propriétés algébriques pour trouver de nouvelle identités trigonométriques.
Exemple 2. On peut déduire directement de l'identité précédente le fait que

$$\sin(\theta) = \tan(\theta)\cos(\theta).$$

Question 1
Montrer que $\sin(\theta) + \cos(\theta) = \cos(\theta)(\tan(\theta) + 1)$ à partir de l'identité donnée dans le dernier exemple.

2. Identité de Pythagore

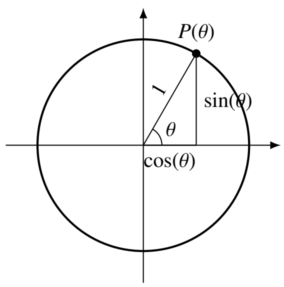
Note. On utilise la notation $\sin^2(\theta)$ pour écrire de manière plus rapide $(\sin(\theta))^2$.

De même, on utilise la notation $\cos^2(\theta)$ pour $(\sin(\theta))^2$ et $\tan^2(\theta)$ pour $(\tan(\theta))^2$.

On utilise aussi on utilise cette notation avec n'importe quel exposant : $\sin^3(\theta) = (\sin(\theta))^3$, $\tan^5(\theta) = (\tan(\theta))^5$, etc.

Proposition 2.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

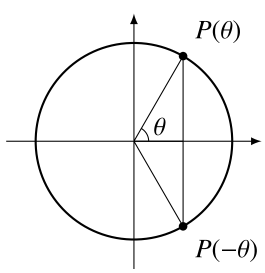


Question 2
Vérifier que l'identité de Pythagore est vraie pour $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

3. Parité

Proposition 3.

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \qquad\qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta)$$



Exemple 3.

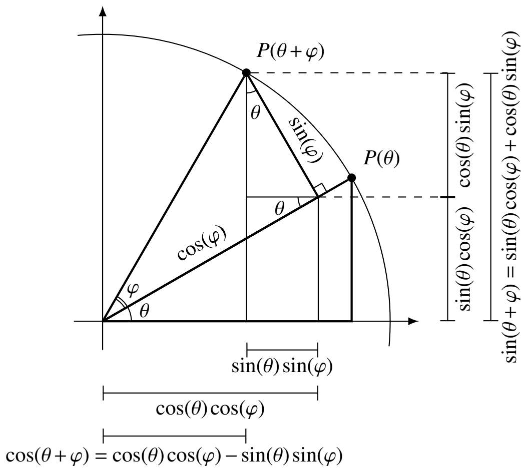
$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Question 3
Vérifier que les identités de parité sont vraies pour les angles suivants. Dans cacun des cas, illustrer l'égalité à l'aide du cercle trigonométrique.

a) $\theta = \pi$ b) $\theta = \frac{\pi}{4}$ c) $\theta = \frac{5\pi}{6}$

4. Sommes et différences d'angles

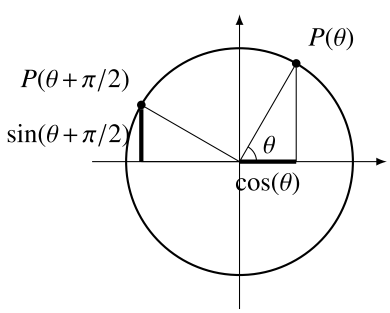
$$\sin(\theta+\varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi)+\cos(\theta)\sin(\varphi)$$
$$\cos(\theta+\varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi)-\sin(\theta)\sin(\varphi)$$



Exemple 4. Utiliser les identité trigonométrique pour la somme d'angles afin de montrer que $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \sin(\theta)(0)+\cos(\theta)(1)\\ &= \cos(\theta)\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser le cercle trigonométrique pour montrer la même identité.



Question 4
Utiliser les identité trigonométrique pour la somme d'angles afin de montrer que $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$.

Question 5
Utiliser le cercle trigonométrique pour montrer que $\cos(\theta+\pi) = -\cos(\theta)$.

Question 6
Utiliser les identités trigonométriques $\sin(\alpha+\beta)$ et $\cos(\alpha+\beta)$ pour trouver les identités pour

a) $\sin(\alpha-\beta)$ b) $\cos(\alpha-\beta)$ c) $\sin(2\theta)$ d) $\cos(2\theta)$

5. Exercices supplémentaires

Question 7
Démontrer les identités suivantes à l'aide du cercle trigonométrique.

a) $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$

b) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta)$.

c) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\theta)$

d) $\cos(\pi-\theta) = -\cos(\theta)$

Question 8
Démontrer les identités suivantes à l'aide des identité pour les sommes d'angles.

a) $\sin(\theta+\pi) = -\sin(\theta)$.

b) $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta)$.

Question 9
Démontrer les identités suivantes à l'aide des identités pour les sommes d'angles.

a) $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

b) $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$

c) $\sin(3\theta) = \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$

d) $\cos(3\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

Question 10

a) Montrer que $\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$.

b) Utiliser la dernière égalité et les identités trigonométriques pour les sommes d'angles pour déterminer la valeur exacte de $\sin(\frac{\pi}{12})$

Question 11
Démontrer les identités trigonométriques suivantes :

a) $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

b) $\tan^2(\theta)+1 = \sec^2(\theta)$
(ind. : Commencer avec l'identité contenant $\sin^2(\theta)$ et $\cos^2(\theta)$ et diviser par un dénominateur adéquat).

Question 12
Démontrer les identités trigonométriques suivantes à l'aide des identitées connues.

a) $\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

b) $\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

c) $\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

Solutions

Question 1

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \tan(\theta)\cos(\theta)\\ \sin(\theta)+\cos(\theta) &= \tan(\theta)\cos(\theta)+\cos(\theta)\\ \sin(\theta)+\cos(\theta) &= \cos(\theta)(\tan(\theta)+1)\end{aligned}$$

Question 2

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta) &= 1\\ \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 1\\ \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= 1\\ \frac{1}{4}+\frac{3}{4} &= 1\end{aligned}$$

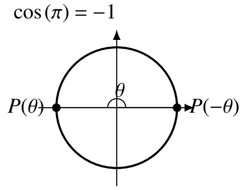
Question 3

a) $\sin(-\pi) = 0$

$-\sin(\pi) = -0 = 0$

$\cos(-\pi) = -1$

$\cos(\pi) = -1$

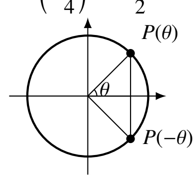


b) $\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$-\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

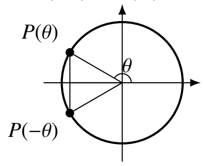


c) $\sin\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{1}{2}$

$-\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

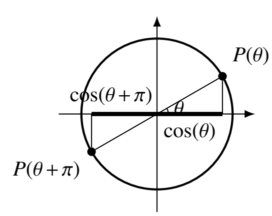
$\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = -\left(\dfrac{1}{2}\right)$



Question 4

$$\begin{aligned}\cos(\theta+\pi) &= \cos(\theta)\cos(\pi)-\sin(\theta)\sin(\pi)\\ &= \cos(\theta)(-1)-\sin(\theta)(0)\\ &= -\cos(\theta)\end{aligned}$$

Question 5



Question 6

a) Appliquer l'identité pour $\sin(\alpha+\beta)$ à $\alpha+(-\beta)$ et simplifier pour pour obtenir $\sin(\alpha)\cos(\beta)-\cos(\alpha)\sin(\beta)$

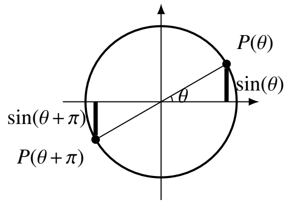
b) $\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\alpha)\sin(\beta)$

c) Appliquer l'identité pour $\sin(\alpha+\beta)$ à $\theta+\theta$ pour et simplifier pour obtenir $2\sin(\theta)\cos(\theta)$

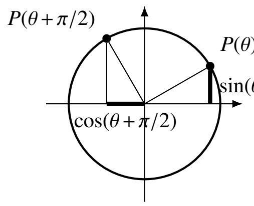
d) $\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$

Question 7

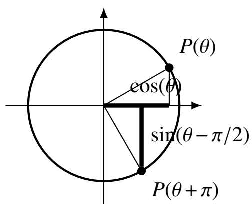
a)



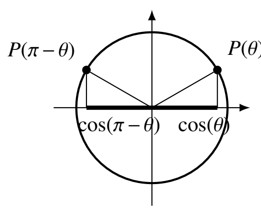
b)



c)



d)



Question 8

a) $\begin{aligned}\sin(\theta+\pi) &= \sin(\theta)\cos(\pi)+\cos(\theta)\sin(\pi)\\ &= \sin(\theta)(-1)+\cos(\theta)(0)\\ &= -\sin(\theta)\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &= \cos(\theta)(0)+\sin(\theta)(1)\\ &= \sin(\theta)\end{aligned}$

Question 9

a) $\begin{aligned}\sin(2\theta) &= \sin(\theta+\theta)\\ &= \sin(\theta)\cos(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)\\ &= 2\sin(\theta)\cos(\theta)\end{aligned}$

b) $\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos(\theta+\theta)\\ &= \cos(\theta)\cos(\theta)-\sin(\theta)\sin(\theta)\\ &= \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\end{aligned}$

c) Utiliser $3\theta=\theta+2\theta$

d) Utiliser $3\theta=\theta+2\theta$

Question 10

a) $\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{4\pi}{12}-\frac{3\pi}{12}=\frac{\pi}{12}$.

b) $\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}+\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$

Question 11

a) $\begin{aligned}\sin(2\theta) &= \sin(\theta+\theta)\\ &= \sin(\theta)\cos(\theta)+\cos(\theta)\sin(\theta)\\ &= 2\sin(\theta)\cos(\theta)\end{aligned}$

b) On part de l'identité $\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$. Si on divise chaque membre de cette égalité par $\cos^2(\theta)$, on obtient

$$\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}+\frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)}=\frac{1}{\cos^2(\theta)}.$$

En simplifiant et en utilisant les propriétés des fractions, cette dernière égalité devient

$$\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2+1=\left(\frac{1}{\cos(\theta)}\right)^2.$$

Par définition des fonctions $\tan(\theta)$ et $\sec(\theta)$, on obtient enfin que

$$(\tan(\theta))^2+1=(\sec(\theta))^2,$$

c'est à dire

$$\tan^2(\theta)+1=\sec^2(\theta).$$

Question 12

a)
$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\\ \cos(2\theta) &= \left(1-\sin^2(\theta)\right)-\sin^2(\theta)\\ \cos(2\theta) &= 1-2\sin^2(\theta)\\ 2\sin^2(\theta) &= 1-\cos(2\theta)\\ \sin^2(\theta) &= \frac{1-\cos(2\theta)}{2}\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}\cos(2\theta) &= \cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)\\ \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta)-\left(1-\cos^2(\theta)\right)\\ \cos(2\theta) &= 2\cos^2(\theta)-1\\ 2\cos^2(\theta) &= 1+\cos(2\theta)\\ \cos^2(\theta) &= \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\end{aligned}$$

c) On utilise trois identités suivantes :

$$\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cos(\theta),$$
$$\cos(2\theta)=1-2\sin^2(\theta).$$
$$\cos^2(\theta)=1-\sin^2(\theta).$$

$$\begin{aligned}\sin(3\theta) &= \sin(2\theta+\theta)\\ &= \sin(2\theta)\cos(\theta)+\cos(2\theta)\sin(\theta)\\ &= (2\sin(\theta)\cos(\theta))\cos(\theta)+\left(1-2\sin^2(\theta)\right)\sin(\theta)\\ &= 2\sin(\theta)\cos^2(\theta)+\sin(\theta)-2\sin^3(\theta)\\ &= 2\sin(\theta)\left(1-\sin^2(\theta)\right)+\sin(\theta)-2\sin^3(\theta)\\ &= 2\sin(\theta)-2\sin^3(\theta)+\sin(\theta)-2\sin^3(\theta)\\ &= 3\sin(\theta)-4\sin^3(\theta)\end{aligned}$$