Exposants et radicaux

1. Exposants positifs

Définition. Si n est un nombre entier positif et B est un nombre réel quelconque, alors la puissance B^n est définie par

$$B^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{B \cdot B \cdots B \cdot B}_{n \text{ fois}}.$$

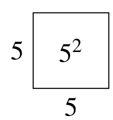
Le nombre B est appelé la **base**, le nombre n est l'**exposant** et B^n est la **puissance**.

Note. Il y a différentes manières de lire une expression comme

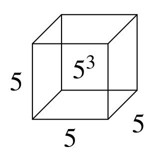
$$8 = 2^3.$$

On peut dire « huit est deux à la puissance trois », ou encore « huit est deux puissance trois ». On dit aussi « deux exposant trois ».
Note. Certaines puissances ont des noms particuliers à cause de leur sens géométrique. Elles sont le « **carré** » pour la deuxième puissance et le « **cube** » pour la troisième puissance.

Par exemple, « cinq au carré » ou « le carré de 5 » signifie 5^2.



« Cinq au cube » ou « le cube de cinq » signifie 5^3.



Question 1
Réécrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants.

a) $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$
b) $(-1)(-1)(-1)(-1)(-1)$
c) 7
d) $\sqrt{2}\,\sqrt{2}\,\sqrt{2}$
e) « Le cube de sept »
f) « Le carré de une demie. »
g) « Sept puissance cinq ».
h) « la huitième puissance de sept ».

Question 2
Évaluer les puissances suivantes.

a) 5^3 b) 2^1 c) $(-1)^3$ d) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ e) $\left(\frac{3}{10}\right)^4$ f) $\left(\sqrt{2}\right)^4$

1.1. Puissances utiles pour les calculs

Les puissances suivantes reviennent souvent dans les calculs. Il est utile de bien les connaitre pour être capable de les identifier.

Les puissances de deux :

$$2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \quad 2^4 = 16 \quad 2^5 = 32 \quad 2^6 = 64$$

$$2^7 = 128 \quad 2^8 = 256 \quad 2^9 = 512 \quad 2^{10} = 1024$$

Les puissances de trois :

$$3^2 = 9 \quad 3^3 = 27 \quad 3^4 = 81$$

Les puissances de cinq :

$$5^2 = 25 \quad 5^3 = 125 \quad 5^4 = 625$$

Les puissances de sept :

$$7^2 = 49 \quad 7^3 = 343$$

Les puissances de dix :

$$10^2 = 100 \quad 10^3 = 1000 \quad 10^4 = 10000 \quad \cdots$$

Question 3

a) Déterminer la valeur de 2^{12} (sans calculatrice, sachant que $2^{10} = 1024$).

b) Déterminer la valeur de $(-2)^7$ (sans calculatrice !).

2. Propriétés des exposants

2.1. Produits de puissances

Proposition 1. Le produit de deux puissances ayant la même base est la puissance obtenue en additionnant leurs exposants.

$$B^n B^m = B^{n+m}.$$

Exemple 1.

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$$

$$2^4 \cdot 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10}$$

$$10^3 \cdot 10^6 = 10^{3+6} = 10^9$$

$$\pi^2 \cdot \pi^2 = \pi^{2+2} = \pi^4$$

Question 4
Réécrire si possible les expressions suivantes avec un seul exposant.

a) $5^3 \cdot 5^7$

b) $2^3 \cdot 2^3$

c) $2^3 \cdot 3^2$

d) $10 \cdot 10^3$

e) $7^3 \cdot 7^5 \cdot 7^8$

f) $\left(\frac{2}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$

g) $\left(\sqrt{5}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^4$

Question 5
Refaire la question a) de la question précédente sans utiliser la proposition 1. Expliquer pourquoi la notation exponentielle permet de simplifier les choses.

2.2. Quotients de puissances

Proposition 2. Le quotient de puissances de même base est la puissance obtenue en faisant la différence de leurs exposants.

$$\frac{B^n}{B^m} = B^{n-m}.$$

Exemple 2.

$$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3} = 2^2.$$

$$\frac{\pi^{10}}{\pi^8} = \pi^{10-8} = \pi^2.$$

$$\frac{\left(\sqrt{3}\right)^5}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \left(\sqrt{3}\right)^{5-2} = \left(\sqrt{3}\right)^3.$$

Question 6
Réécrire les expressions suivantes à l'aide d'un seul exposant.

a) $\dfrac{10^{12}}{10^9}$ b) $\dfrac{3^7}{3^2}$ c) $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^5}{\left(\sqrt{2}\right)^8}$ d) $\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^4}{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$

Question 7
Vérifier que $\frac{5^6}{5^2} = 5^{6-2} = 5^4$ en développement les puissances du numérateur et du dénominateur en produits. Utiliser que la définition de B^n et la simplification de fractions.

2.3. Puissance d'un produit

Proposition 3. Le produit de puissances de même exposants est le produit de leurs bases à la même puissance.

$$A^n B^n = (A \cdot B)^n.$$

Exemple 3.

$$2^4 \cdot 3^4 = (2 \cdot 3)^4$$

$$10^5 \cdot 2^5 = (10 \cdot 2)^5$$

$$2^3 \cdot \pi^3 = (2\pi)^3$$

Question 8
Réécrire les expressions suivantes comme une seule puissance.

a) $3^5 \cdot 5^5$ b) $\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot 5^3$ c) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \pi^5$ d) $5^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2$

2.4. Puissances de quotients

Proposition 4. Le quotient de puissances de même exposants est le quotient de leurs bases à la même puissance.

$$\frac{A^n}{B^n} = \left(\frac{A}{B}\right)^n.$$

Exemple 4.

$$\frac{2^3}{5^3} = \left(\frac{2}{5}\right)^3.$$

Question 9
Vérifier que $3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 5)^2$ en développement les puissances en produits. Utiliser que la définition de B^n et les propriétés des produits. Nommer les propriétés des produits qui sont utilisées.

2.5. Puissances de puissances ou puissances imbriquées

Proposition 5.
$$(A^n)^m = A^{nm}$$

Exemple 5.
$$(2^3)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}$$
$$(2^{-1})^3 = 2^{(-1)(3)} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3}$$

Question 10
Réécrire les expression suivantes à l'aide d'un seul exposant.

a) $\left(3^2\right)^5$ b) $\left(3^5\right)^2$ c) $\left(\left(3^5\right)^2\right)^2$ d) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^3$

3. Exposants négatifs ou nuls

On peut étendre la définition d'exposant à tous les nombres entiers.

Définition.
$$A^0 = 1 \qquad A^{-n} = \frac{1}{A^n}$$

Exemple 6.
$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$
$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$
$$\frac{2}{3} = 2\frac{1}{3} = 2 \cdot 3^{-1}$$

Question 11
Écrire les fractions suivantes à l'aide d'exposants négatifs.

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{2^3}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{5^2}$

Proposition 6. Si on divise des puissances de même base, on soustrait les exposants :
$$\frac{B^n}{B^m} = B^{n-m}.$$

Exemple 7.
$$\frac{5^{15}}{5^{12}} = 5^{15-12} = 5^3$$
$$\frac{5^{12}}{5^{15}} = 5^{12-15} = 5^{-3} = \frac{1}{5^3}$$

Question 12
Simplifier les expressions suivantes. Exprimer votre réponse à l'aide d'exposants positifs seulement.

a) $\dfrac{2^{10}\cdot 3^4}{2^7\cdot 3^2}$

b) $\dfrac{2^4\cdot 3^2}{2^3\cdot 3^4}$

c) $\dfrac{2^4\cdot 3^{-2}}{2^3\cdot 3}$

d) $\dfrac{3^4\cdot 5^2}{3^5\cdot 5^{-2}}$

e) $\dfrac{1}{2^{-1}}$

f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}$

g) $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^5\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^{-4}}$

4. Racines

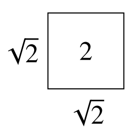
Définition. La **racine n-ième** d'une puissance P est une base B telle que $B^n = P$.

$$\sqrt[n]{P} = B \iff B^n = P$$

Exemple 8.

$$\sqrt{4} = 2\text{car } 2^2 = 4.$$
$$\sqrt[3]{8} = 2\text{car } 2^3 = 8.$$
$$\sqrt[4]{81} = 3 \text{ car } 3^4 = 81.$$
$$\sqrt{100} = 10 \text{ car } 10^2 = 100.$$
$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \text{ car } \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Note. La racine carré d'un nombre est la longeur du côté d'un carré d'aire donnée. Par exemple, si l'aide du carré est 2, son côté est $\sqrt{2}$ car $\sqrt{2}\sqrt{2} = 2$.



Question 13
Évaluer les expressions suivantes et justifier les réponses à l'aide de la définition de racine n-ième.

a) $\sqrt[3]{27}$ b) $\sqrt{16}$ c) $\sqrt[3]{125}$ d) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{81}}$

Proposition 7. Les racines n-ièmes et les puissances n-ièmes sont des opérations inverses pour les nombres positifs :

$$\sqrt[n]{B^n} = B \text{ si } B \geq 0 \quad \text{et} \quad \left(\sqrt[n]{B}\right)^n = B.$$

Exemple 9.

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$
$$\sqrt{2^2} = 2$$
$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 = 2$$
$$\sqrt[3]{2^3} = 2$$

Proposition 8. Les racines n-ième ne sont pas toujours définies :

- $\sqrt[n]{P}$ est toujours défini si n impair ;
- $\sqrt[n]{P}$ est défini seulement si $P \geq 0$ si n pair.

Exemple 10. $\sqrt{-2}$ n'est pas défini car il est impossible qu'une puissance paire soit négative.

$\sqrt{2}$ est défini car $2 \geq 0$.

$\sqrt[3]{2}$ est défini et $\sqrt[3]{-2}$ est aussi défini.

$\sqrt[3]{8} = 3$ et $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$.

Question 14
Déterminer lesquelles des racines suivantes sont définies et donner leur valeur si possible.

a) $\sqrt{-25}$ b) $\sqrt[3]{-125}$ c) $\sqrt{-\frac{1}{25}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{25}}$

5. Exposants fractionnaires

Définition. Les puissances où l'exposant est de la forme $\frac{1}{n}$ sont définie par les racines n-ième.

$$A^{1/n} = \sqrt[n]{A}$$

Exemple 11.

$$2^{1/2} = \sqrt{2}$$
$$10^{1/3} = \sqrt[3]{10}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

Question 15
Réécrire les expressions suivantes à l'aide de racines n-ième.

a) $5^{1/10}$
b) $3^{1/2}$
c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$ e) $\left(\sqrt{2}\right)^{1/3}$

On peut réécrire une puissance fractionnaire à l'aide de racine n-ième même quand l'exposant est une fraction quelconque $\frac{n}{m}$ en utilisant des exposants imbriqués :

$$A^{n/m} = A^{n\frac{1}{m}} = (A^n)^{1/m} = \sqrt[m]{A^n}$$

Exemple 12.

$$2^{2/3} = \left(2^{1/3}\right)^2 = \left(\sqrt[3]{2}\right)^2$$
$$5^{7/4} = \left(5^{1/3}\right)^7 = \left(\sqrt[3]{5}\right)^7$$
$$10^{3/4} = \left(10^{1/4}\right)^3 = \left(\sqrt[4]{10}\right)^3$$

Note. Il y a toujours une seconde manière de le faire :

$$A^{n/m} = A^{n\frac{1}{m}} = \left(A^{1/m}\right)^n = \left(\sqrt[m]{A}\right)^n.$$

Question 16
Réécrire les racines n-ième suivantes à l'aide d'exposants fractionnaires.

a) $\sqrt{5^3}$ b) $\sqrt[5]{2^3}$ c) $\sqrt[3]{2^5}$ d) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2$

6. Propriétés des racines

Proposition 9. Les racines ont les même propriétés que les exposants. La racine d'un produit est le produit des racines :

$$\sqrt[n]{AB} = \sqrt[n]{A}\,\sqrt[n]{B}$$

La racine d'un quotient est le quotient des racines :

$$\sqrt[n]{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$$

Exemple 13.

$$\sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{5}\,\sqrt{7}$$

$$\sqrt{\frac{5}{7}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$$

Question 17
Réécrire les expressions suivantes à l'aide d'une seule racine et simplifier si possible.

a) $\sqrt{2}\,\sqrt{5}$

b) $\sqrt{2}\,\sqrt{3}\,\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{25}\,\sqrt[3]{5}$

d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

On se sert de ces propriétés pour simplifier des expressions comportant des racines en mettant en évidence des puissances appropriés.
Exemple 14.

$$\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4}\,\sqrt{2} = 2\,\sqrt{2}$$

$$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{2} = 2\,\sqrt[3]{2}$$

Question 18
Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{20}$ b) $\sqrt{60}$ c) $\sqrt{63}$ d) $\sqrt[3]{40}$ e) $\sqrt[3]{54}$

Définition. La *rationalisation* d'une fraction comportant une racine carrée consiste à éliminer une racine au dénominateur.

$$\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A}{\sqrt{B}}\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{B}} = \frac{A\,\sqrt{B}}{B}$$

Exemple 15.

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{5}{\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\,\sqrt{5}}{3}$$

Question 19
Rationaliser les expressions suivantes et simplifier.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{5\,\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

6.1. Autres propriétés des racines

On peut simplifier des expressions complexes comportant des racines n-ièmes en réécrivant ces expressions à l'aide d'exposants fractionnaires et en utilisant les propriétés des exposants.
Exemple 16.

$$\begin{aligned}\sqrt{\sqrt[3]{2}} &= \left(2^{1/3}\right)^{1/2}\\ &= 2^{\frac{1}{3}\frac{1}{2}}\\ &= 2^{\frac{1}{6}}\\ &= \sqrt[6]{2}\end{aligned}$$

6.2. Erreur fréquente à éviter

Une erreur fréquente à éviter est de considérer que la propriété suivante est vraie :

$$\sqrt{A+B} = \sqrt{A} + \sqrt{B}.$$

Cette propriété est fausse. Par exemple, la valeur de $\sqrt{3^2+4^2}$ est 5 :

$$\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

Si on utilise la fausse propriété, on trouve un résultat différent :

$$\sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{25} = 3+4 = 7.$$

Exercices supplémentaires

Question 20
Réécrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants. (Il n'est pas nécessaire d'évaluer le résultat !)

a) $\underbrace{10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10}_{23 \text{ fois}}$
b) Le cube de deux tiers.
c) « Le carré de douze »
d) « 43 puissance 12 ».
e) « La treizième puissance de cinq ».
f) π

Question 21
Évaluer les expressions suivantes. La réponse doit être un nombre ou une fraction simplifiée.

a) 2^3
b) 2^{-3}
c) $(-2)^3$
d) 2^0
e) 2^1
f) -2^4
g) $\sqrt{(-16)^2}$
h) $\sqrt{25}$
i) $\sqrt{-25}$
j) $\sqrt[3]{125}$
k) $\sqrt[3]{27}$
l) $\sqrt[3]{-8}$
m) $\sqrt[4]{16}$
n) $\sqrt[4]{-16}$
o) $\sqrt[5]{-32}$
p) $\sqrt[3]{343}$
q) $(2+3)^2$
r) 2^2+3^2
s) $\left((2^1)^2\right)^3$
t) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$
u) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^3$
v) $\left(-\dfrac{5}{3}\right)^3$
w) $\sqrt[3]{27}$
x) $\sqrt[3]{-27}$
y) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

Question 22
Réécrire les expressions suivantes sans exposants.

a) $2^2 2^3$
b) $3^0 3^5$
c) $\dfrac{1}{2^3}$
d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3$
e) $\dfrac{7^5}{7^4}$
f) $\left(2^3\right)^2$

Question 23
Combiner les exposants des expressions suivantes pour obtenir une expression comportant un seul exposant positif.

a) $2^2 2^3$
b) $3^0 3^5$
c) 2^{-3}
d) $2^5 \cdot 3^5$
e) $\dfrac{7^5}{7^4}$
f) $\left(2^3\right)^2$
g) $\dfrac{1}{2^2 2^3}$
h) $\dfrac{1}{2^2}\dfrac{1}{2^3}$
i) $\dfrac{1}{2^2 2^3 2^4}$
j) $\dfrac{1}{2^2}\dfrac{1}{2^3}\dfrac{1}{2^4}$
k) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^3$
l) $\dfrac{1}{5^2}5^4$
m) $\dfrac{7^5}{7^4}$
n) $\dfrac{3^2/3^3}{3^4/3^5}$
o) $\left(\dfrac{1/2}{1/2^2}\right)^3$
p) $\left(2^3\right)^4$
q) $\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\right)^2$
r) $\left(3^2\right)^3$
s) $\left(\left(3^2\right)^3\right)^2$
t) $\left(\left(\left(2^2\right)^2\right)^2\right)^2$

Question 24
Écrire les expression suivantes sous forme de fractions sans exposants négatifs.

a) 2^{-3}
b) 3^{-1}
c) 10^{-6}
d) 10^{-3}
e) $\frac{2}{2^{-2}}$
f) $\frac{2^{-1}}{2^{-2}}$
g) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}$
h) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$
i) $\frac{3}{2^{-2}}$
j) $\sqrt{2}^{-1}$
k) $\sqrt[3]{2}^{-1}$
l) $\sqrt{2}^{-3}$

Question 25
Évaluer et simplifier les expressions suivantes.

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$
b) 10^{-1}
c) 10^{-2}
d) 10^{-3}
e) 10^{-6}
f) $\dfrac{5^2}{3^{-1}}$
g) $\dfrac{3}{2^{-2}}$
h) $\dfrac{2^{-1}}{2^{-2}}$
i) $\dfrac{3^3}{3^2}$
j) $\dfrac{3^2}{3^3}$
k) $\dfrac{3^{10}}{3^8}$
l) $\dfrac{2^3/2^2}{2^5/2^4}$
m) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}$
n) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$
o) $\dfrac{2^{-3}3^2 4^5}{3^8 2^{-1} 9^{-3}}$
p) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

Question 26
Combiner les exposants dans les expressions suivantes pour obtenir une expression comportant un seul exposant entier ou fractionnaire positif.

a) $2^{1/2} \cdot 2^{1/3}$
b) $\dfrac{2^{1/2}}{2^{1/3}}$
c) $3^0 3^{1/5}$
d) $\dfrac{1}{5^{-2/3}}5^{4/3}$
e) $\dfrac{1}{2^{1/2}2^{-1/3}}$
f) $\left(2^{-1/2}\right)^2$
g) $\left(3^2\right)^{-1/3}$
h) $\left(\left(3^2\right)^3\right)^{1/2}$
i) $\left(\left(\left(2^{-2}\right)^{1/2}\right)^{-2}\right)^{1/2}$

Question 27
Écrire les expression suivantes sous forme de fractions et de racines sans exposants négatifs ou fractionnaires.

a) $2^{1/2}$
b) $13^{1/3}$
c) $5^{1/3}$
d) $\left(\sqrt[3]{27}\right)^2$ ou $\sqrt[3]{27^2}$
e) $\left(\frac{2}{3}\right)^{1/2}$
f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{1/2}$
g) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{1/3}$

Question 28
Évaluer les expressions suivantes.

a) $81^{1/2}$
b) $27^{1/3}$
c) $8^{1/3}$
d) $8^{2/3}$
e) $16^{3/4}$
f) $27^{2/3}$
g) $\left(\frac{81}{16}\right)^{1/2}$
h) $\left(\frac{81}{16}\right)^{1/4}$

Question 29
Simplifier les expressions suivantes.

a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$
b) $\dfrac{\left(3^{-3}\right)^4 3^{-2}2^7}{3^{-4}2^{-10}}$
c) $\dfrac{\left(2^{-5}\right)^3 3^{-8}2^7}{(2^2 3^6)^{-2}}$
d) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\left(\frac{1}{2}\right)^5}$
e) $\dfrac{2^3\cdot 3^2\cdot 2^2}{2^6\cdot 3\cdot 2^{-1}}$
f) $27^{(2/3)}$

Question 30
Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{15}\,\sqrt{21}\,\sqrt{35}$
b) $\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{12}\,\sqrt[3]{9}$
c) $\sqrt[3]{12}\,\sqrt[3]{12}\,\sqrt[3]{12}$
d) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{8}\right)^5}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}$
e) $\sqrt{\dfrac{2^{-2}}{2^4}}$
f) $\dfrac{\sqrt{2^6\cdot 5^4}}{2^{-1}\cdot 5^2}$
g) $\left(\sqrt[4]{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}\right)^6$
h) $\sqrt[3]{27}$
i) $\sqrt[3]{125}$
j) $\sqrt{3^2(11)}$
k) $\sqrt{48}$
l) $\sqrt{(-16)^2}$
m) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$

Question 31
Vrai ou faux ?

a) $2^2+3^2=4^2$
b) $3^2+4^2=5^2$
c) $(a+b)^2=a^2+b^2$
d) $(4a)^{1/2}=2\sqrt{a}$
e) $(2)^{3/2}=3$
f) $\left((341)^{3/2}\right)^{2/3}=341$
g) $\dfrac{1}{4a^2+3}=\dfrac{1}{4a^2}+\dfrac{1}{3}$
h) $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{3^2}+\sqrt{4^2}$
i) $\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{2^2}+\sqrt{3^2}$
j) $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2}+\sqrt{b^2}$
k) $\dfrac{3a}{4a}=\dfrac{3}{4}a$
l) $\dfrac{a}{2a}=\dfrac{1}{2}$
m) $\frac{4}{3}a=\dfrac{3a}{4a}$
n) $\dfrac{a^2}{2a}=\dfrac{a}{2}$
o) $(4a)^{1/2}=2\sqrt{a}$

Question 32
Évaluer les expressions suivantes.

a) 2^3
b) 2^{-3}
c) $(-2)^3$
d) -2^3
e) $(-2)^4$
f) -2^4
g) $\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 2^2}{2^6\cdot 3\cdot 2^{-1}}$
h) $\frac{1}{2^{-2}}$
i) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$
j) $(2+3)^2$
k) 2^2+3^2
l) $(2^{1+3})^2$

Question 33
Évaluer et simplifier les expressions suivantes.

a) -4^3
b) $(-4)^3$
c) 2^0+0^2
d) $(-2)^5+(-5)^2$
e) -2^5-5^2
f) 2^3
g) 2^{-3}
h) $(-2)^3+3^{-2}$
i) 2^3+3^2
j) $(2+3)^4$
k) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$
l) $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2$

Question 34
Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{2^5}{2^{-3}}$
b) $\dfrac{2^3\cdot 3^{-4}}{3^{-5}\cdot 2^4}$
c) $\dfrac{2^4\cdot 3^2\cdot 5^{-1}}{2^{-1}\cdot 3^{-3}\cdot 5^2}$
d) $\frac{\left(3^{-3}\right)^4\cdot 3^{-2}\cdot 2^7}{3^{-4}\cdot 2^{-10}}$
e) $\dfrac{4\cdot 25\,x^3y^{-3}z^5}{2\cdot 125\,y^3x^2z^7}$
f) $\dfrac{\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{2}{3}}}\right)}{\left(\frac{b^{\frac{3}{4}}}{a^{\frac{1}{4}}}\right)}$
g) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-1}$
h) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2}$

Question 35
Réécrire chacune des expressions ci-dessous à l'aide de radicaux, sans exposants négatifs ou fractionnaires.

a) $21^{1/2}$
b) $5^{\frac{1}{4}}$
c) $3^{-1/2}$
d) $8^{\frac{3}{7}}$
e) $3\cdot 2^{\frac{1}{2}}$
f) $10^{-\frac{3}{5}}$
g) $3^{5/2}$
h) $2^{-2/3}$

Question 36
Transformer chacune des expressions ci-dessous sous la forme d'une puissance.

a) $\sqrt{5}$
b) $\sqrt[5]{3}$
c) $\sqrt[3]{2^5}$
d) $\sqrt[3]{5^2}$
e) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{20}}$
f) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2^5}}$
g) $\sqrt[5]{3^7}$
h) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{3^7}}$
i) $\sqrt[5]{\dfrac{1}{3^7}}$
j) $\sqrt{3^4}$

Question 37
Évaluer les expressions suivantes.

a) $\sqrt{25}$
b) $\sqrt[3]{27}$
c) $\sqrt{-25}$
d) $\sqrt[3]{-27}$
e) $\dfrac{\left(\sqrt[3]{8}\right)^5}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^2}$
f) $2^{-\frac{5}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}$
g) $\sqrt{(-16)^2}$
h) $\sqrt{10}\,\sqrt{15}\,\sqrt{6}$
i) $\sqrt[3]{12}\,\sqrt[3]{12}\,\sqrt[3]{12}$
j) $\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{12}\,\sqrt[3]{9}$

Question 38
Simplifier les expressions suivantes. Écrire la réponse sans exposants négatifs ou fractionnaires.

a) $10^5 \cdot 10^3$
b) $10^{500} \cdot 10^{300}$
c) $10^{99} \cdot 10^{-100}$
d) $\sqrt{10^5} \cdot \sqrt{10^{-3}}$
e) $27^{(2/3)}$
f) $2^{1/2} \cdot 2^{2/3}$
g) $\sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$
h) $\sqrt{\sqrt{2^{12}}}$

Solutions

Question 1

a) 7^8
b) $(-1)^5$
c) 7^1 (car le nombre 7 n'apparait qu'une seule fois dans le produit de 7 par lui-même)
d) $\left(\sqrt{2}\right)^3$
e) 7^3
f) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$
g) 7^5
h) 7^8

Question 2

a) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
b) 2
c) $(-1)(-1)(-1) = -1$
d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
e) $\dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{3}{10} = \dfrac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \dfrac{81}{10000}$
f) $\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}\right) = 2 \cdot 2 = 4$

Question 3

a) $2^{12} = 2^{10} \cdot 2 \cdot 2 = 1024 \cdot 2 \cdot 2 = 2048 \cdot 2 = 4096$
b) $(-2)^7 = (-2) \cdot \underbrace{(-2) \cdot \cdots \cdot (-2)}_{7 \text{ fois}} = -2^7$
car il y a un nombre impair de facteur (-2)

Question 4

a) $5^3 \cdot 5^7 = 5^{3+7} = 5^{10}$
b) $2^3 \cdot 2^3 = 2^{3+3} = 2^6$
c) Les bases sont différents, la proposition 1 ne peut être appliquée.
d) $10^1 \cdot 10^3 = 10^{1+3} = 10^4$
e) $7^3 \cdot 7^5 \cdot 7^8 = 7^{3+5+8} = 7^{16}$
f) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 \left(\dfrac{2}{3}\right)^{10} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{5+10} = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{15}$
g) $\left(\sqrt{5}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^4 = \left(\sqrt{5}\right)^{3+4} = \left(\sqrt{5}\right)^7$

Question 5

$5^3 \cdot 5^7$
$= (5 \cdot 5 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5)$
$= 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
$= 5^{10}$

Il est plus simple d'utiliser la propriété 1 pour additionner le nombre de copies de 5 que de faire la liste de toutes ces copies et de les compter.

Question 6

a) $10^{12} \cdot 10^9 = 10^{12-9} = 10^3$
b) $\dfrac{3^7}{3^2} = 3^{7-2} = 3^5$
c) $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^5}{\left(\sqrt{2}\right)^8} = \left(\sqrt{2}\right)^{5-8} = \left(\sqrt{2}\right)^{-3}$
d) $\dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)^4}{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^{4-2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^2$

Question 7

$$\frac{5^6}{5^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot \cancel{5 \cdot 5}}{\cancel{5 \cdot 5}} = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$$

Question 8

a) $3^5 \cdot 5^5 = (3 \cdot 5)^5 = 15^5$
b) $\left(\sqrt{2}\right)^3 \cdot 5^3 = \left(\sqrt{2} \cdot 5\right)^3 = \left(5\sqrt{2}\right)^3$
c) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \cdot \pi^5 = \left(\dfrac{1}{2} \cdot \pi\right)^5 = \left(\dfrac{\pi}{2}\right)^5$
d) $5^2\left(1+\sqrt{2}\right)^2 = \left(5\left(1+\sqrt{2}\right)\right)^2$

Question 9

$3^2 \cdot 5^2 = (3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5)$
$= 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$
$= 3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5$
$= (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5)$
$= (3 \cdot 5)^2$
Associativité du produit égalités 2 et 4
Commutativité du produit égalité 3.

Question 10

a) 3^{10}
b) 3^{10}
c) 3^{20}
d) $\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{2^6}$

Question 11

a) 10^{-1}
b) 2^{-3}
c) $3 \cdot 10^{-1}$
d) $\sqrt{2} \cdot 5^{-2}$

Question 12

a) $2^3 \cdot 3^2$
b) $\dfrac{2}{3^2}$
c) $\dfrac{2}{3^3}$
d) $\dfrac{5^4}{3}$
e) $\dfrac{1}{1/2} = 2$
f) $\dfrac{1}{1/2} = 2$
g) $\dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^5\left(\sqrt{2}\right)^{-4}} = \left(\sqrt{2}\right)^{3-5+2+4} = \left(\sqrt{2}\right)^4 = 4$

Question 13

a) 3 car $3^3 = 27$
b) 4 car $4^2 = 16$
c) 5 car $5^3 = 125$
d) $\frac{1}{3}$ car $\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

Question 14

a) Non définie
b) Définie, la valeur est -5
c) Non définie
d) Définie, la valeur est $\frac{1}{5}$

Question 15

a) $\sqrt[10]{5}$
b) $\sqrt{3}$
c) $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$
d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$
e) $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$

Question 16

a) $5^{3/2}$
b) $2^{3/5}$
c) $2^{5/3}$
d) $5^{2/3}$

Question 17

a) $\sqrt{10}$
b) $\sqrt{30}$
c) $\sqrt[3]{125} = 5$
d) $\sqrt{\frac{2}{3}}$
e) $\sqrt[3]{\frac{81}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$

Question 18

a) $2\sqrt{5}$
b) $2\sqrt{15}$
c) $3\sqrt{7}$
d) $2\sqrt[3]{5}$
e) $3\sqrt[3]{2}$

Question 19

a) $\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

b) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}\sqrt{5}}{5} = \sqrt{3}\sqrt{5} = \sqrt{15}$

Question 20

a) 10^{23}
b) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$
c) 12^2
d) 43^{12}
e) 5^{13}
f) π^1

Question 21

a) 8
b) $\frac{1}{8}$
c) -8
d) 1
e) 2
f) -16
g) 16
h) 5
i) Non défini
j) 5
k) 3
l) -2
m) 2
n) Non défini
o) -2
p) 7
q) 25
r) 13
s) 64
t) $\frac{1}{9}$
u) $\frac{27}{8}$
v) $-\frac{125}{27}$
w) 3
x) -3
y) $3/2$

Question 22

a) $(2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)$
b) $1\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3$
c) $\frac{1}{2\cdot 2\cdot 2}$
d) $\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2}$
e) $\frac{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7}{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7}$
f) $(2\cdot 2\cdot 2)\cdot(2\cdot 2\cdot 2)$

Question 23

a) 2^5
b) 3^5
c) $\frac{1}{2^3}$
d) $(2\cdot 3)^5$
e) 7^1
f) 2^6
g) $\frac{1}{2^5}$
h) $\frac{1}{2^5}$
i) $\frac{1}{2^9}$
j) $\frac{1}{2^9}$
k) $\frac{1}{5^3}$
l) 5^2
m) 7
n) 3^0
o) 2^3
p) 2^{12}
q) $\frac{1}{2^6}$
r) 3^6
s) 3^{12}
t) 2^{16}

Question 24

a) $\frac{1}{8}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{10^6}$
d) $\frac{1}{10^3}$
e) $\frac{2}{1/2^2}$
f) $\frac{1/2}{1/2^2}$
g) $\frac{3}{2}$
h) $\frac{3^2}{2^2}$
i) $\frac{3}{1/2^2}$
j) $\frac{1}{\sqrt{2}}$
k) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
l) $\frac{1}{\sqrt{2^3}}$

Question 25

a) 8
b) $\frac{1}{10}$
c) $\frac{1}{100}$
d) $\frac{1}{1000}$
e) $\frac{1}{1000000}$
f) 75
g) 12
h) 2
i) 3
j) $\frac{1}{3}$
k) 9
l) 1
m) $\frac{4}{9}$
n) 9
o) 256
p) $-\frac{1}{8}$

Question 26

a) $2^{5/6}$
b) $2^{1/6}$
c) $3^{1/5}$
d) 5^2
e) $\frac{1}{2^{1/6}}$
f) $\frac{1}{2^1}$
g) $\frac{1}{3^{2/3}}$
h) 3^3
i) 2^1

Question 27

a) $\sqrt{2}$
b) $\sqrt[3]{13}$
c) $\sqrt[3]{5}$
d) 9
e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
f) $\frac{1}{\sqrt{5}}$
g) $-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$

Question 28

a) 9
b) 3
c) 2
d) 4
e) 8
f) 9
g) $9/4$
h) $\frac{3}{2}$

Question 29

a) 9
b) $\frac{2^{17}}{3^{10}}$
c) $\frac{3^4}{2^4}$
d) 1
e) 3
f) 9

Question 30

a) $3\cdot 5\cdot 7 = 105$
(ind. $15\cdot 21\cdot 35 = 3\cdot 5\cdot 3\cdot 7\cdot 5\cdot 7$)
b) $6\sqrt[3]{2}$
c) 12
d) 8
e) $\frac{1}{8}$
f) $2^4 = 16$
g) 3
h) 3
i) 5
j) $3\sqrt{11}$
k) $4\sqrt{3}$
l) 16
m) $3/2$

Question 31

a) Faux
b) Vrai
c) Faux
d) Vrai
e) Faux
f) Vrai
g) Faux
h) Faux
i) Faux
j) Faux
k) Faux
l) Vrai
m) Faux
n) Vrai
o) Vrai

Question 32

a) 8
b) $\frac{1}{8}$
c) -8
d) -8
e) 16
f) -16
g) 3
h) 4
i) 4
j) 25
k) 13
l) 256

Question 33

a) -64
b) -64
c) 1
d) -7
e) -57
f) 8
g) $\frac{1}{8}$
h) $\frac{-71}{9}$
i) 17
j) 625
k) 4
l) $\frac{1}{4}$

Question 34

a) 2^8
b) $\frac{3}{2}$
c) $\frac{2^5\cdot 3^5}{5^3}$
d) 9
e) $\frac{2x}{5y^6z^2}$
f) $\frac{a^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{17}{12}}}$
g) 10
h) 9

Question 35

a) $\sqrt{21}$
b) $\sqrt[4]{5}$
c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$
d) $\sqrt[7]{8^3}$
e) $3\sqrt{2}$
f) $\frac{1}{\sqrt[5]{10^3}}$
g) $\sqrt{3^5}$
h) $\frac{1}{\sqrt[3]{2^3}}$

Question 36

a) $5^{\frac{1}{2}}$
b) $3^{\frac{1}{5}}$
c) $2^{\frac{5}{3}}$
d) $5^{\frac{2}{3}}$
e) $20^{-\frac{1}{4}}$
f) $2^{-\frac{5}{3}}$
g) $3^{\frac{7}{5}}$
h) $3^{-\frac{7}{5}}$
i) $3^{-\frac{7}{5}}$
j) 3^2

Question 37

a) 5
b) 3
c) $\nexists$
d) -3
e) 8
f) $2^{-\frac{11}{6}}$
g) 16
h) 30
i) 12
j) $6\sqrt[3]{2}$

Question 38

a) 10^8
b) 10^{800}
c) $10^{-1} = \frac{1}{10}$
d) $\left(10^{5-3}\right)^{1/2} = 10$
e) 9
f) $2^{7/6} = \sqrt[6]{2^7}$
g) $3/2$
h) 2^3