Fractions et quotients

1. Concept de fractions et de quotients

Définition. Un **quotient** un nombre représenté par deux nombres N et D, avec D différent de 0.

$$\frac{N}{D}.$$

Le nombre N est appelé le numérateur et le nombre D est appelé le dénominateur.

Le quotient $\frac{A}{B}$ est aussi appelé *rapport* de A et B.

Définition. Une **fraction** ou **nombre rationnel** est un quotient dont le dénominateur et le numérateur sont des nombres entiers.

Note. Tous les nombres rationnels sont des fractions, mais l'inverse n'est pas vrai. Par exemple, $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ est une fraction, mais n'est pas un nombre rationnel.

Question 1
Lesquelles des expressions suivantes sont des quotients ? Lesquels sont aussi des fractions ?

a) $\dfrac{3}{99}$
b) $\dfrac{-9}{2}$
c) $\dfrac{\pi}{2}$
d) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$
e) $\dfrac{3\pi}{2\pi}$
f) $\dfrac{3+2}{7+2}$

Question 2
Réécrire les expressions suivantes en utilisant le symbole ÷ plutôt que la barre de fraction. (Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs)

a) $\dfrac{5\times 2}{3}$
b) $5\times\dfrac{2}{3}$
c) $\dfrac{5}{2/3}$
d) $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
e) $\dfrac{3}{2}\sqrt{5}$

Question 3
Réécrire les expressions suivantes en utilisant la barre de fraction plutôt que le symbole ÷. (Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs)

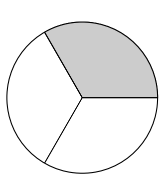
a) $\dfrac{5\times 2}{3}$
b) $\dfrac{5}{2\times 3}$
c) $\dfrac{5\times 7}{2\times 3}$
d) $\dfrac{5}{3}+\sqrt{2}$
e) $\dfrac{5+\sqrt{2}}{3}$
f) $\dfrac{5}{3+\sqrt{2}}$

1.1. Représentation des fractions

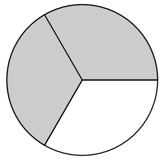
Pour développer son sens des fractions et bien comprendre les propriétés des fractions, il est important d'être capable de se les représenter.

On peut représenter les fractions par des parties de cercles (ou « pointes de tarte »).

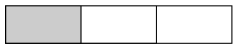
Par exemple, la fraction $\frac{1}{3}$ représente une part d'un cercle découpé en 3 :



Si on a deux parts de 1/3, on a 2/3 :



On peut aussi représenter les fractions comme les parties d'une longueur. Par exemple, 1/3 représenté comme une longueur :



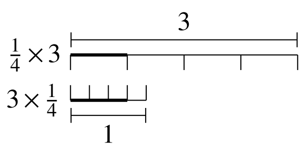
La fraction 3/4 :

Si les représentations les plus utilisées utilisent l'aire de figures, on peut aussi représenter des fractions de longueurs : la fraction 3/4 :

Note. Une fraction comme $\frac{3}{4}$ peut être lue comme « un quart de 3 » (ou $\frac{1}{4} \times 3$) ou « 3 quarts » (ou $3 \times \frac{1}{4}$).

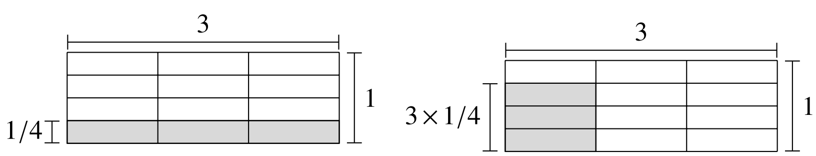
$$\frac{1}{4}3 = \frac{3}{4} = 3\frac{1}{4}$$

Les deux lectures représentent la même fraction car elles donnent le même résultat :



On peut aussi voir que les deux expressions désignent la même aire si on les représentes de la manière suivante :

$$\frac{1}{4} \times 3 = 3 \times \frac{1}{4}$$



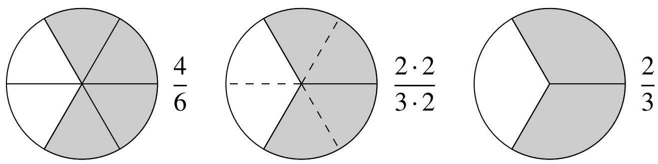
Question 4
Faire une figure représentant le fait que $\frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3} = 2 \times \frac{1}{3}$.

1.2. Simplification de quotients

Proposition 1. On peut simplifier un facteur commun au numérateur et au dénominateur d'un quotient :

$$\frac{AC}{BC} = \frac{A}{B}$$

Exemple 1. Illustrons la simplification de la fraction $\frac{4}{6}$.



Question 5
Illustrer la simplification $\dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$.

Question 6
Simplifier les quotients suivants.

a) $\dfrac{20}{25}$ b) $\dfrac{36}{60}$ c) $\dfrac{35}{100}$ d) $\dfrac{5\sqrt{2}}{15\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{8\pi^2}{24\pi}$

1.3. Égalité de quotients

Définition. Deux quotients sont égaux s'ils peuvent chacun être simplifié à un quotient ayant les même dénominateur et numérateur.

Exemple 2. Les fractions $\dfrac{5}{10}$ et $\dfrac{3}{6}$ sont égales car elles se simplifient à la même fraction.

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} \text{ et } \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 3. Les quotients $\frac{10\pi}{12}$ et $\frac{15\pi}{18}$ sont égaux car ils se simplifient à la même fraction.

$$\frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6} \text{ et } \frac{15\pi}{18} = \frac{5\pi}{18}.$$

Question 7
Déterminer si les quotients suivants sont égaux.

a) $\dfrac{4}{10}$ et $\dfrac{400}{1000}$

b) $\dfrac{9}{15}$ et $\dfrac{12}{20}$

c) $\dfrac{24}{56}$ et $\dfrac{12}{42}$

d) $\dfrac{9\sqrt{2}}{12}$ et $\dfrac{15\sqrt{2}}{20}$

Théorème 1 (« Règle de trois »)**.** Deux quotients $\frac{A}{B}$ et $\frac{C}{D}$ sont égaux quand $AD = BC$.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \iff AD = BC.$$

Exemple 4. Les fractions $\frac{2}{3}$ et $\frac{4}{6}$ sont égales car

$$2\cdot 6 = 4\cdot 3.$$

Exemple 5. Les quotients $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{9\pi}{12}$ sont égaux car

$$(3\pi)\cdot 12 = (9\pi)\cdot 4$$
$$36\pi = 36\pi$$

Question 8
Déterminer si les quotients suivants sont égaux à l'aide du dernier théorème.

a) $\dfrac{4}{5}$ et $\dfrac{80}{100}$ b) $\dfrac{42}{3}$ et $\dfrac{13}{2}$ c) $\dfrac{6\sqrt{2}}{10}$ et $\dfrac{9\sqrt{2}}{15}$

1.4. Dénominateur commun

Proposition 2. Il est toujours possible de transformer deux quotients différents pour qu'ils aient un même dénominateur :

$$\frac{A}{B} \quad \frac{C}{D}$$

$$\frac{AD}{BD} \quad \frac{CB}{DB}$$

Exemple 6. Mettre les fractions $\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{3}$ au dénominateur commun.

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{4}{6}$$

Exemple 7. Mettre les fractions $\dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{1}{8}$ au dénominateur commun.

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 8}{6 \cdot 8} = \frac{8}{48}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 6}{8 \cdot 6} = \frac{6}{48}$$

Question 9
Mettre les quotients suivants au même dénominateur.

a) $\dfrac{7}{20}$ et $\dfrac{1}{7}$ b) $\dfrac{11}{6}$ et $\dfrac{12}{5}$ c) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2}}{5}$

Proposition 3. Le plus petit dénominateur commun de deux quotients est le plus petit commun multiple des dénominateurs.

Rappel. Pour trouver le plus petit commun multiple (PPCM) de deux nombres naturels, on les factorise pour ensuite former le PPCM en prenant la plus grande puissance de chacun des facteurs apparaissant dans les deux factorisations.

Exemple 8. Trouvons le plus petit commun multiple de 24 et 36.

On factorise chacun des nombres :

$$24 = 2 \cdot 12 = 2 \cdot 2 \cdot 6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$$

$$36 = 2 \cdot 18 = 2 \cdot 2 \cdot 9 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

La plus grande puissance de 2 qui apparait est 3. La plus grande puissance de 3 apparait est 2.

Le PPCM est donc $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$.

Question 10
Déterminer le PPCM de 60 et 90.

Exemple 9. Mettre les fractions $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{8}$ au dénominateur commun en prenant le plus petit dénominateur possible.

Le plus petit commun multiple de $6 = 2 \cdot 3$ et $8 = 2^3$ est $2^3 \cdot 3 = 24$.

$$\frac{1}{6} = \frac{1 \cdot 4}{6 \cdot 4} = \frac{4}{24},$$
$$\frac{1}{8} = \frac{1 \cdot 3}{8 \cdot 3} = \frac{3}{24}.$$

Exemple 10. Mettre les quotients $\frac{3\pi}{5}$ et $\frac{\pi}{4}$ au dénominateur commun en prenant le plus petit dénominateur possible.

Le plus petit commun multiple de $5 = 5$ et $4 = 2^2$ est $5 \cdot 2^2 = 20$.

$$\frac{3\pi}{5} = \frac{3\pi \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12\pi}{20},$$
$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi \cdot 5}{4 \cdot 5} = \frac{5\pi}{20}.$$

Question 11
Mettre les quotients suivants au dénominateur commun en prenant le plus petit dénominateur possible.

a) $\frac{1}{12}$ et $\frac{1}{30}$.
b) $\frac{5}{42}$ et $\frac{3}{63}$.
c) $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{4}$.
d) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{\sqrt{2}}{4}$.
e) $\frac{3\sqrt{2}}{10}$ et $\frac{3\sqrt{2}}{16}$.
f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

1.5. Comparaison de quotients

Proposition 4. Si deux quotients ont le même dénominateur, on peut les comparer en comparant leur numérateurs.

$$\frac{A}{C} \leq \frac{B}{C} \text{ si } A \leq B$$

Note. La dernière proposition permet donc de comparer deux quotients quelconques en les mettant au dénominateur commun.

Exemple 11. Déterminons laquelle de ces deux fractions est la plus grande :

$$\frac{4}{5} \text{ et } \frac{13}{15}.$$

On met les deux fractions au même dénominateur :

$$\frac{4}{5} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} = \frac{12}{15}.$$

Il faut donc comparer

$$\frac{12}{15} \text{ et } \frac{13}{15}.$$

Comme $\frac{4}{5} = \frac{12}{15} < \frac{13}{15}$, on a que

$$\frac{4}{5} < \frac{13}{15}.$$

Question 12
Déterminer lequel des deux quotient est le plus grand (sans convertir en nombres décimaux !)

a) $\frac{5}{6}$ et $\frac{4}{5}$

b) $\frac{7}{24}$ et $\frac{3}{10}$

c) $\frac{5\pi}{6}$ et $\frac{3\pi}{4}$

d) $\frac{5\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{4}$

e) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{3\sqrt{2}}{4}$

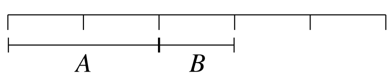
f) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ et $\frac{2}{\sqrt{3}}$

2. Opérations sur les quotients

2.1. Addition et soustraction

Définition. Si deux quotients on le même dénominateur, on les additionne ou les soustrait en additionnant leurs numérateurs :

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}.$$



Exemple 12. Additionner et simplifier le résultat.

$$\frac{3}{16} + \frac{5}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Exemple 13. Additionner et simplifier le résultat.

$$\frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{2}+\pi}{5}.$$

Question 13
Additionner et simplifier le résultat.

a) $\frac{5}{32} + \frac{7}{32}$

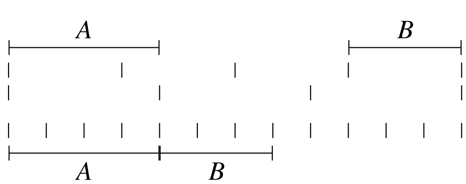
b) $\frac{26}{42} - \frac{12}{42}$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}$

Définition. Si deux quotients ont des dénominateurs différents, on les additionne trouvant un dénominateur commun :

$$\frac{A}{B} + \frac{C}{D} = \frac{AF}{BG} + \frac{CF}{DG},$$

où $BF = DG$ est toujours un dénominateur commun possible (mais pas nécessairement le plus petit).



Exemple 14. Additionner et simplifier le résultat :

$$\begin{aligned}\frac{3}{4} + \frac{1}{5} &= \frac{3\cdot 5}{4\cdot 5} + \frac{1\cdot 4}{5\cdot 4}\\ &= \frac{15}{20} + \frac{4}{20}\\ &= \frac{19}{20}.\end{aligned}$$

Exemple 15. Additionner et simplifier le résultat :

$$\begin{aligned}\frac{3}{16}+\frac{1}{6} &= \frac{3}{2^4}+\frac{1}{2\cdot 3}\\ &= \frac{3\cdot 3}{2^4\cdot 3}+\frac{1\cdot 2^3}{2\cdot 3\cdot 2^3}\\ &= \frac{9}{48}+\frac{8}{48}\\ &= \frac{17}{48}.\end{aligned}$$

Exemple 16. Additionner et simplifier le résultat :

$$\begin{aligned}\frac{3}{8}-\frac{5}{12} &= \frac{3\cdot 3}{8\cdot 3}-\frac{5\cdot 2}{12\cdot 2}\\ &= \frac{9}{24}-\frac{10}{24}\\ &= -\frac{1}{24}.\end{aligned}$$

Question 14
Additionner et simplifier le résultat.

a) $\dfrac{5}{32}+\dfrac{7}{32}$

b) $\dfrac{7}{10}-\dfrac{3}{4}$

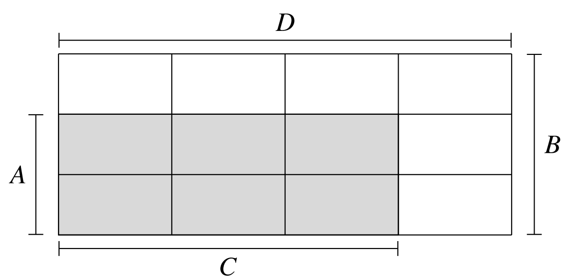
c) $\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{3\pi}{4}$

d) $\dfrac{5\sqrt{2}}{7}+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

2.2. Produit de fractions

Définition. Le produit de deux fractions s'obtient en faisant le produit de leurs numérateurs et de leurs dénominateurs :

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD}.$$



Exemple 17. Multiplier et simplifier le résultat.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{5}=\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}=\frac{21}{20}.$$

Exemple 18. Multiplier et simplifier le résultat.

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\cdot 4}{4\cdot 5}=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Note. Dans le dernier exemple, on obtient le même résultat en simplifiant les facteurs communs *avant* de multiplier les numérateurs et dénominateurs. Les calculs sont généralement plus simples si on simplifie dès que possible :

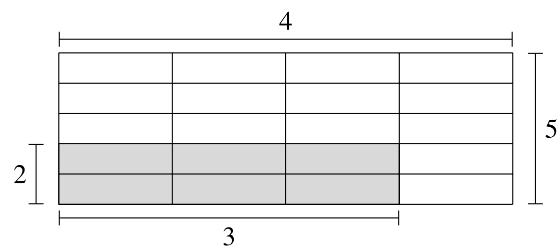
$$\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3\cdot \cancel{4}}{\cancel{4}\cdot 5}=\frac{3}{5}.$$

Exemple 19. Multiplier et simplifier le résultat.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{5}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 5}=\frac{2}{2\cdot 5}=\frac{1}{5}.$$

Exemple 20. Représenter le produit $\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}$ en s'inspirant de l'illustration donnée dans la définition du produit de deux fractions.

$$\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$$



Question 15
Multiplier et simplifier le résultat.

a) $\frac{5}{12}\cdot\frac{4}{25}$ b) $\frac{24}{14}\cdot\frac{21}{32}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}$

Question 16
Représenter le produit $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}$ en s'inspirant de l'illustration donnée dans la définition du produit de deux fractions.

2.3. Inverse

Définition. L'**inverse** d'un nombre A est le nombre $\frac{1}{A}$ tel que

$$A\cdot\frac{1}{A}=1$$

Exemple 21. L'inverse du nombre 2 est $\frac{1}{2}$ car $2\cdot\frac{1}{2}=1$.

L'inverse du nombre 5 est $\frac{1}{5}$ car $5\cdot\frac{1}{5}=1$.

L'inverse du nombre π est $\frac{1}{\pi}$ car $\pi\cdot\frac{1}{\pi}=1$.

L'inverse du nombre $\sqrt{2}$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}$ car $\pi\cdot\frac{1}{\pi}=1$.

Proposition 5. Le nombre 0 n'a pas d'inverse.

Démonstration. Si $B=\frac{1}{0}$ était l'inverse de 0, alors on devrait avoir que

$$0\times B=0\times\frac{1}{0}=1.$$

D'autre par, comme multiplier par zéro donne toujours zéro, on doit aussi avoir que

$$0\times B=0.$$

Comme il est impossible d'avoir que

$$0=0\times B=1,$$

il est impossible d'avoir un nombre B inverse de 0. □

Proposition 6. L'inverse d'une fraction est le rapport inverse.

$$\frac{1}{\left(\frac{A}{B}\right)} = \frac{B}{A}.$$

Exemple 22.

$$\frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}.$$

$$\frac{1}{-4/5} = \frac{5}{-4} = -\frac{5}{4}.$$

$$\frac{1}{3\sqrt{5}/4} = \frac{4}{3\sqrt{5}}.$$

Question 17
Déterminer l'inverse des quotients suivants.

a) $\dfrac{253}{473}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) 3 d) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

2.4. Quotient de quotients

Définition. Le quotient de deux quotients est le produit du numérateur par l'inverse du dénominateur.

$$\frac{\left(\frac{A}{B}\right)}{\left(\frac{C}{D}\right)} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Exemple 23.

$$\frac{2/3}{8/9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{2 \cdot 9}{3 \cdot 8} = \frac{3}{4}.$$

Exemple 24.

$$\frac{1/5}{2} = \frac{1/5}{2/1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 1}{5 \cdot 2} = \frac{1}{10}.$$

Exemple 25.

$$\frac{\pi/2}{3} = \frac{\pi/2}{3/1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi \cdot 1}{2 \cdot 3} = \frac{\pi}{6}.$$

Question 18
Évaluer et simplifier.

a) $\dfrac{2/5}{3/4}$ b) $\dfrac{49/12}{7/6}$ c) $\dfrac{33}{3/2}$ d) $\dfrac{\pi/3}{2/5}$

3. Propriétés des quotients

Proposition 7.

(F0) $\dfrac{1}{A}$ non défini pour $A = 0$ (Division par zéro)

(F1) $\dfrac{A}{1} = A$ (Division par 1)

(F2) $A\dfrac{1}{B} = \dfrac{A}{B} = \dfrac{1}{B}A$ (Notation fractionnaire)

(F3) $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D} \iff AD = BC$ (Égalité de fractions)

(F4) $\dfrac{1}{1/A} = A$ (Inverse de l'inverse)

(F5) $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{A}{B}$ (Simplification facteur commun)

(F6) $\dfrac{A}{B}+\dfrac{C}{B}=\dfrac{A+C}{B}$ (Somme, même déno.)

(F7) $\dfrac{A}{B}+\dfrac{C}{D}=\dfrac{AD+CB}{BD}$ (Somme, déno. commun)

(F8) $\left(\dfrac{A}{B}\right)\left(\dfrac{C}{D}\right)=\dfrac{AC}{BD}$ (Produit)

(F9) $\dfrac{A/B}{C/D}=\dfrac{A}{B}\dfrac{D}{C}$ (Division)

Exemple 26. Évaluer l'expression suivante.

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{9}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}} &= \frac{\frac{2\cdot 9}{3\cdot 5}}{\frac{1}{2}+\frac{3}{5}} && (F8)\\
&= \frac{\frac{2\cdot 9}{3\cdot 5}}{\frac{5}{10}+\frac{6}{10}} && (F5)\\
&= \frac{\frac{2\cdot 2}{5}}{\frac{5}{10}+\frac{6}{10}} && (F5)\\
&= \frac{\left(\frac{2\cdot 3}{5}\right)}{\left(\frac{11}{10}\right)} && (F6)\\
&= \frac{\left(\frac{6}{5}\right)}{\left(\frac{11}{10}\right)} \\
&= \frac{6}{5}\cdot\frac{10}{11} && (F9)\\
&= \frac{6\cdot 10}{5\cdot 11} && (F8)\\
&= \frac{6\cdot 2}{11} && (F5)\\
&= \frac{12}{11}
\end{aligned}
$$

Question 19

Évaluer les expressions suivantes. Indiquer à chacune des étapes quelle propriété des quotients est utilisée.

a) $\dfrac{\frac{4}{5}-\frac{1}{2}}{4/5}$ b) $\dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}$

Question 20

Effectuer les calculs suivants en utilisant le moins d'étapes possibles en utilisant que les propriétés des quotients F1 à F9 et les propriétés de base de la multiplication et de l'addition. Dire à chaque égalité quelle propriété est utilisée.

a) $\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{2/5}{2}+\dfrac{3}{5}$

Exercices supplémentaires

Question 21

Réécrire les expressions suivantes utilisant la barre de fraction en utilisant plutôt le symbole ÷. (Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs)

a) $\dfrac{2\times 3}{4}$

b) $2\times\dfrac{3}{4}$

c) $\dfrac{(2\times 3)}{4}$

d) $\dfrac{2\times 3}{4\times 5}$

e) $\dfrac{2+3}{4+5}$

f) $\dfrac{2/3}{4/5}$

g) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+1/2}}$

Question 22

Réécrire les expressions suivantes utilisant le symbole ÷ en utilisant plutôt une barre de fraction. (Il n'est pas nécessaire d'effectuer les calculs)

a) $2\times(3\div 4)$

b) $2\times 3\div 4$

c) $(2\times 3)\div 4$

d) $2\times 3\div 4\times 5$

e) $2\times 3\div(4\times 5)$

f) $(2\times 3)\div(4\times 5)$

g) $2\div 3\div 4$

h) $2\div(3\div 4)$

i) $2\div 3\div 4\div 5$

j) $(2\div 3)\div(4\div 5)$

Question 23

Simplifier les fractions suivantes.

a) $\dfrac{12}{24}$

b) $\dfrac{4}{10}$

c) $\dfrac{12}{18}$

d) $\dfrac{15}{25}$

e) $\dfrac{30}{100}$

f) $\dfrac{40}{100}$

g) $\dfrac{50}{100}$

h) $\dfrac{64}{128}$

i) $\dfrac{81}{3}$

j) $\dfrac{24}{34}$

k) $\dfrac{45}{100}$

l) $\dfrac{26}{18}$

m) $\dfrac{70}{30}$

n) $\dfrac{75}{30}$

o) $\dfrac{30}{35}$

p) $\dfrac{64}{24}$

q) $\dfrac{21}{49}$

Question 24

Simplifier les quotients suivants le plus possible.

a) $\dfrac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{3\pi}{6\pi}$

c) $\dfrac{6\pi}{4}$

d) $\dfrac{3\pi^2}{4\pi}$

e) $\dfrac{2\sqrt{3}}{4}$

f) $\dfrac{8\sqrt{3}}{10\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{2\sin(35)}{5\sin((35)}$

h) $\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+4}$

i) $\dfrac{2\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}$

j) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+4}$

k) $\dfrac{2\sqrt{2}+2}{4}$

Question 25

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\dfrac{2\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 25}$

b) $\dfrac{9\cdot 25}{3\cdot 125}$

c) $\dfrac{9/5}{3/125}$

d) $\dfrac{18/4}{3/24}$

e) $\dfrac{5/99}{3/11}$

f) $\dfrac{19+9}{23+12}$

g) $\dfrac{14/18}{-21/12}$

h) $\dfrac{-15/9}{18/-12}$

i) $\dfrac{4}{2/5}$

j) $\dfrac{3}{4/5}$

k) $\dfrac{3/4}{5}$

l) $\dfrac{18/21}{12}$

m) $\dfrac{14/12}{21}$

n) $\dfrac{1}{\dfrac{4}{3}+\dfrac{3}{4}}$

o) $\dfrac{3+\dfrac{1}{2}}{3}$

p) $\dfrac{3}{3+\dfrac{1}{2}}$

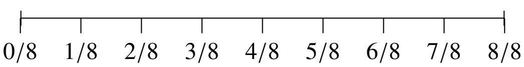
q) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}}$

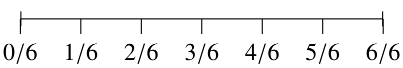
r) $\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{2}{5}}{\dfrac{3}{2}-\dfrac{2}{5}}$

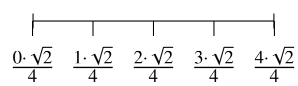
s) $\dfrac{4}{12/5}$

Question 26

Réécrire les graduations en simplifiant chacun des quotients.

a) 

b) 

c) 

Question 27

Trouver le plus petit commun multiple des nombres suivants.

a) 32 et 12

b) 15 et 10

c) 8 et 12

d) 21 et 14

e) 73 et 43

f) 5950 et 260

g) 24, 16 et 12

h) 480, 210, 735 et 49

Question 28

Mettre au plus petit dénominateur commun les fractions suivantes.

a) $\dfrac{3}{4}$ et $\dfrac{1}{6}$

b) $\dfrac{1}{5}$ et $\dfrac{1}{10}$

c) $\dfrac{2}{15}$ et $\dfrac{3}{10}$

d) $\dfrac{3}{14}$ et $\dfrac{5}{21}$

Question 29
Effectuer chacune des opérations ci-dessous et simplifier le résultat.

a) $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}$
b) $\frac{5}{12}-\frac{5}{8}$
c) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
d) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$
e) $1+\frac{3}{4}$
f) $1-\frac{15}{32}$
g) $2+\frac{2}{5}$
h) $3-\frac{1}{4}$
i) $2-\frac{3}{8}$

Question 30
Évaluer les expressions suivantes en donnant le résultat sous forme de fraction et sans l'aide de la calculatrice.

a) $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{7}$
b) $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}$
c) $\frac{1}{3}\div 2$
d) $\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{5}{4}+\frac{5}{6}$

Question 31
Effectuer chacune des opérations ci-dessous et simplifier le résultat.

a) $\frac{3}{4}\left(\frac{5}{3}\right)$
b) $\frac{5}{12}\left(\frac{5}{3}\right)$
c) $\frac{25}{26}\left(\frac{13}{15}\right)$
d) $4\left(\frac{5}{48}\right)$
e) $\frac{3/7}{5/3}$
f) $\frac{3/7}{3/5}$

Question 32
Effectuer chacune des opérations ci-dessous et simplifier le résultat.

a) $\frac{2}{3}+\frac{4/5}{1/3}-\frac{3}{2}$
b) $2+\left(\frac{4}{3}\right)\frac{7/2}{14/9}$
c) $-\frac{3}{5}\left(-\frac{2}{6}\right)\left(\frac{5}{7}\right)$
d) $\frac{\frac{1}{4}+\frac{2}{5}}{\frac{3}{2}-\frac{2}{5}}$
e) $\frac{\frac{1}{7}-\frac{2}{7}}{7}$
f) $\frac{7}{1/7-2/7}$
g) $\frac{1/2}{3-4/3}$
h) $\frac{\frac{3}{7}-\frac{4}{5}}{3}$
i) $\frac{2-\frac{2}{5}}{2}$
j) $\left(\frac{2}{3}\right)\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{3}$
k) $\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$

Question 33
Simplifier les expressions suivantes.

a) $\frac{256}{5(16)}$
b) $\frac{2^4 3^2 5^3}{100}$
c) $\frac{2^4+2^3}{64}$
d) $\frac{2}{7}+\frac{3}{5}$
e) $\frac{3}{40}-\frac{5}{24}$
f) $\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}{\frac{5}{6}+\frac{7}{8}}$
g) $10\left(\frac{0}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$

Question 34
Déterminer laquelle des deux fractions données est la plus grande (sans convertir en nombre décimal !)

a) $\frac{5}{8}$ et $\frac{5}{9}$
b) $\frac{5}{12}$ et $\frac{2}{5}$
c) $\frac{3}{10}$ et $\frac{5}{12}$
d) $\frac{3}{20}$ et $\frac{1}{12}$

Question 35
Mettre les nombres suivants en ordre croissant sans les convertir en notation décimale.

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}.$
b) $\frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{2}{5}.$
c) $\frac{1}{5}, \frac{3}{8}, \frac{2}{7}.$

Question 36
Dans le système de mesure impérial en pouces, on utilise les fractions de pouces pour les longueurs plus petites que le pouce. On parle donc de quart de pouce, de huitième de pouce, etc. On utilise que des fractions dont le dénominateur est une puissance de 2.

Mettre les longueurs suivantes en ordre croissant.

a)
$$\frac{3}{8},\quad \frac{1}{4},\quad \frac{5}{16},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{8},\quad \frac{15}{32}$$

b)
$$\frac{5}{8},\quad \frac{9}{16},\quad \frac{21}{32},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{39}{64}$$

Question 37
La notation fractionnaire n'a pas toujours existé ! Dans l'Égypte des pharaons, les seules fractions qui pouvaient être écrites avec les hiéroglyphes étaient celles de la forme $\frac{1}{n}$, c'est à dire les inverses des nombres, à l'exception de la fraction $\frac{2}{3}$ qui avait son propre symbole.

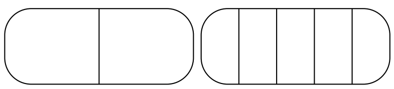
Pour simplifier, supposons que le symbole égyptien pour $\frac{1}{n}$ est $\overline{n}$.

a) Que vaut $\overline{4}+\overline{4}$?
b) Que vaut $\overline{3}+\overline{4}$?
c) Exprimer la fraction $\frac{3}{4}$ comme une somme de fractions égyptiennes
d) Exprimer la fraction $\frac{5}{6}$ comme une somme de fractions égyptiennes
e) Que vaut $\overline{3}+\overline{5}$? Pouvez vous trouver une manière d'additionner sans jamais utiliser la notation fractionnaire moderne ?

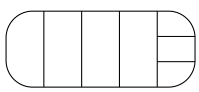
Question 38
Les raisons précises ayant incité les égyptiens à conserver leur manière de noter les fractions aussi longtemps ne nous sont pas connues, mais on croit qu'elle permettait aux scribes de distribuer plus efficacement le grain servant à payer les travailleurs. Le papyrus Rhind, une des sources principales de notre connaissance des mathématiques en Égypte ancienne, comporte plusieurs problèmes de « division de pains » tels que ceux décrits dans ce qui suit.

Représenterons une quantité de blé par une miche de pain.

On peut diviser une miche entière en autant de parts égales que l'on veut. (La taille de chaque part correspondra à une fraction égyptienne : si on divise en 4, chaque part sera de $1/4$)



On peut aussi diviser une part en plus petites parts égales. Par exemple, si on divise un pain en cinq parts égales de un cinquième de pain, on peut prendre une de ces parts de pain et la diviser en trois pour obtenir trois parts d'un quinzième de pain.

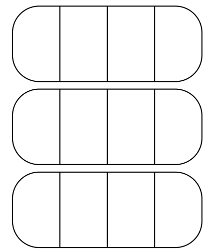


Comme la distribution du salaire était fastidieuse, on cherchait à diminuer la complexité de l'opération en réduisant le nombre de parts à distribuer.

Par exemple, comment diviser 3 pains équitablement entre 4 travailleurs pour faire la distribution en manipulant le moins de morceaux de pain possible ? La notation moderne

$$\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$$

suggère de couper chaque pain en quatre et de donner à chaque travailleur trois quart de miche.



Cette façon de procéder nous oblige cependant à distribuer au total 12 morceaux de miches, et chaque travailleur recevra des quarts de miche.

Note : ces trois problèmes sont tirés du papyrus Rhind, recueil de problèmes mathématiques de l'Égypte ancienne.

a) Peut-on faire mieux ? (indice : en fractions égyptiennes, $\frac{3}{4}$ est exprimé comme $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$!)
b) Comment diviser équitablement 4 pains entre 5 travailleurs en distribuant moins que $20 = 4 \times 5$ morceaux de pain ?
c) Comment diviser équitablement 9 pains entre 10 travailleurs en distribuant moins que $10 \times 9 = 90$ morceaux de pain ?

Question 39
Démontrer que $\frac{1}{A/B} = \frac{B}{A}$ à l'aide de la définition de l'inverse d'un nombre.

Question 40
Démontrer que $-\frac{A}{B} = \frac{-A}{B}$ à l'aide des propriétés des fractions.

Solutions

Question 1

a) C'est une fraction et un nombre rationnel

b) C'est une fraction et un nombre rationnel (le numérateur ou le dénominateur peuvent être négatifs)

c) C'est un quotient, mais pas une fraction car le numérateur n'est pas un nombre entier.

d) C'est une quotient mais pas une fraction car le numérateur est n'est pas un nombre entier.

e) C'est un quotient, mais si on simplifie le facteur commun *pi*, on obtient une fraction. L'expression, telle qu'elle est, est un quotient.

f) C'est une fraction.

Question 2

a) $5 \times 2 \div 3$

b) $5 \times (2 \div 3)$

c) $5 \div (2 \div 3)$

d) $\left(1 + \sqrt{5}\right) \div 2$

e) $(3 \div 2) \cdot \sqrt{5}$

Question 3

a) $5 \times 2 \div 3$

b) $5 \div (2 \times 3$

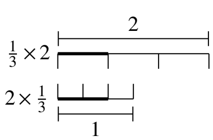
c) $(5 \times 7) \div (2 \times 3$

d) $(5 \div 3) + 2$

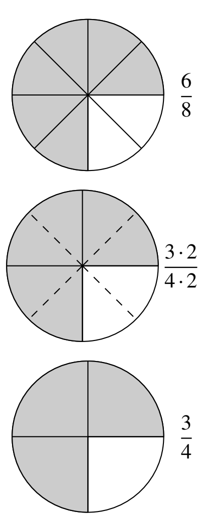
e) $(5 + \sqrt{2}) \div 3)$

f) $5 \div (3 + \sqrt{2})$

Question 4



Question 5



Question 6

a) $\frac{20}{25} = \frac{4 \cdot 5}{5 \cdot 5} = \frac{4}{5}$

b) $\frac{36}{60} = \frac{4 \cdot 9}{4 \cdot 15} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 5} = \frac{3}{5}$

c) $\frac{35}{100} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 20} = \frac{7}{20}$

d)
$$\begin{aligned} \frac{5\sqrt{2}}{15\sqrt{2}} &= \frac{5\sqrt{2}}{3 \cdot 5\sqrt{2}} \\ &= \frac{\cancel{5\sqrt{2}}}{3\cancel{5\sqrt{2}}} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} \frac{8\pi^2}{24\pi} &= \frac{8\pi \cdot \pi}{3 \cdot 8 \cdot \pi} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Question 7

a) $\frac{4}{10} = \frac{400}{1000}$ car les deux fractions sont égales à $\frac{2}{5}$.

b) $\frac{9}{15} = \frac{12}{20}$ car les deux fractions sont égales à $\frac{3}{5}$.

c) Comme $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$ et $\frac{12}{42} = \frac{2}{7}$, les deux fractions ne sont pas égales.

d) $\frac{9\sqrt{2}}{12} = \frac{15\sqrt{2}}{20}$ car les deux fractions sont égales à $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

Question 8

a) $\frac{4}{5} = \frac{80}{100}$ car

$$4 \cdot 100 = 5 \cdot 80$$
$$400 = 400$$

b) $\frac{42}{3} \neq \frac{13}{2}$ car

$$42 \times 2 \neq 23 \times 3$$
$$84 \neq 39.$$

c) $\frac{6\sqrt{2}}{10} = \frac{9\sqrt{2}}{15}$ car

$$6\sqrt{2} \times 15 = 90\sqrt{2},$$
$$9\sqrt{2} \times 10 = 90\sqrt{2}.$$

Question 9

a) $\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 7}{20 \cdot 7} = \frac{49}{140}$
$\frac{1}{7} = \frac{1 \cdot 20}{7 \cdot 20} = \frac{20}{140}$

b) $\frac{11}{6} = \frac{11 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \frac{55}{30}$
$\frac{12}{5} = \frac{12 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \frac{72}{30}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{5\sqrt{3}}{10}$
$\frac{\sqrt{2}}{5} = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{2\sqrt{2}}{10}$

Question 10

$60 = 6 \times 10 = 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 3 \times 5$
$90 = 9 \times 10 = 3 \times 3 \times 2 \times 5 = 2 \times 3^2 \times 5.$
Le PPCM est donc

$$2^2 \times 3^2 \times 5 = 180.$$

Question 11

a) Le PPCM de 12 et 30 est 60.
$\frac{1}{12} = \frac{5}{60}$
$\frac{1}{30} = \frac{2}{60}$

b) Le PPCM de 42 et 63 est 126.
$\frac{5}{42} = \frac{15}{126}$
$\frac{3}{63} = \frac{6}{126}$

c) Le PPCM de 6 et 4 est $2^2 \cdot 3 = 12$
$\frac{5\pi}{6} = \frac{5\pi \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{10\pi}{12}$
$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3\pi}{12}$

d) Le PPCM de 3 et 4 est $3 \cdot 2^2 = 12$
$\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8\sqrt{2}}{12}$
$\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3\sqrt{2}}{12}$

e) Le PPCM de 10 et 16 est $2^4 \cdot 5 = 80$
$\frac{3\sqrt{2}}{10} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 8}{10 \cdot 8} = \frac{24\sqrt{2}}{80}$
$\frac{3\sqrt{2}}{16} = \frac{3\sqrt{2} \cdot 5}{16 \cdot 5} = \frac{15\sqrt{2}}{80}$

f) Le PPCM de $\sqrt{2} et 2\sqrt{2}$ est $2\sqrt{2}$
$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{1}{2\sqrt{2}}$

Question 12

a) $\frac{5}{6} = \frac{25}{30}$
$\frac{4}{5} = \frac{24}{30}$ On a donc

$$\frac{5}{6} > \frac{4}{5}.$$

b) $\frac{7}{24} = \frac{35}{120}$
$\frac{3}{10} = \frac{36}{120}$
On a donc

$$\frac{7}{24} < \frac{3}{10}.$$

c) $\frac{5\pi}{6} = \frac{10\pi}{12}$
$\frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{12}$
On a donc

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{12} < \frac{10\pi}{12} = \frac{5\pi}{6}.$$

d) $\frac{3\pi}{4} = \frac{6\pi}{8}$ On a donc

$$\frac{5\pi}{8} < \frac{6\pi}{8} = \frac{3\pi}{4}.$$

e) $\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{12}$
$\frac{3\sqrt{2}}{4} = \frac{9\sqrt{2}}{12}$
On a donc

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{8\sqrt{2}}{12} < \frac{9\sqrt{2}}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

f) $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{3}}$
$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$
Comme $2\sqrt{2} < 3\sqrt{3}$, on a que

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} < \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Question 13

a)
$$\begin{aligned} \frac{5}{32} + \frac{7}{32} &= \frac{12}{32} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{26}{42} - \frac{12}{42} &= \frac{14}{42} \\ &= \frac{2 \cdot 7}{6 \cdot 7} \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} &= \frac{5\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{(5+3)\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{8\sqrt{3}}{2} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Question 14

a)
$$\begin{aligned} \frac{5}{32} + \frac{7}{32} &= \frac{12}{32} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \frac{7}{10} - \frac{3}{4} &= \frac{14}{20} - \frac{15}{20} \\ &= \frac{-1}{20} \\ &= -\frac{1}{20} \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{4} &= \frac{2 \cdot 5\pi}{2 \cdot 6} - \frac{3 \cdot 3\pi}{3 \cdot 4} \\ &= \frac{10\pi}{12} - \frac{9\pi}{12} \\ &= \frac{10\pi - 9\pi}{12} \\ &= \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} \frac{5\sqrt{2}}{7} + \frac{2\sqrt{2}}{3} &= \frac{15\sqrt{2}}{21} + \frac{14\sqrt{2}}{21} \\ &= \frac{15\sqrt{2} + 14\sqrt{2}}{21} \\ &= \frac{(15+14)\sqrt{2}}{21} \\ &= \frac{(29)\sqrt{2}}{21} \end{aligned}$$

Question 15

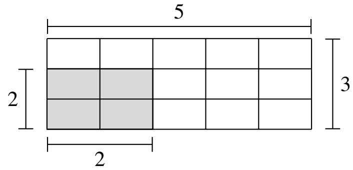
a) $\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{4}{25} = \dfrac{5\cdot 4}{12\cdot 25} = \dfrac{5}{3\cdot 25} = \dfrac{1}{3\cdot 5} = \dfrac{1}{15}$

b) $\dfrac{24}{14}\cdot\dfrac{21}{32} = \dfrac{24\cdot 21}{14\cdot 32} = \dfrac{24\cdot 3}{2\cdot 32} = \dfrac{12\cdot 3}{2\cdot 16} = \dfrac{6\cdot 3}{2\cdot 8} = \dfrac{3\cdot 3}{2\cdot 4} = \dfrac{9}{8}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{5}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{5\cdot 4} = \dfrac{2}{5\cdot 4} = \dfrac{1}{5\cdot 2} = \dfrac{1}{10}$

Question 16

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5} = \frac{4}{15}$$



Question 17

a) $\frac{1}{253/473} = \frac{473}{253}$

b) $\frac{1}{1/3} = \frac{3}{1} = 3$

c) $\frac{1}{3} = \frac{1}{3/1} = \frac{1}{3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}/2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

Question 18

a) $\dfrac{2/5}{3/4} = \dfrac{2}{5}\cdot\dfrac{4}{3} = \dfrac{2\cdot 4}{5\cdot 3} = \dfrac{8}{15}$

b) $\dfrac{49/12}{7/6} = \dfrac{49}{12}\cdot\dfrac{6}{7} = \dfrac{49\cdot 6}{12\cdot 7} = \dfrac{7}{2}$

c) $\dfrac{33}{3/2} = \dfrac{33/1}{3/2} = \dfrac{33}{1}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{33\cdot 2}{1\cdot 3} = \dfrac{11\cdot 2}{1} = 22$

d) $\dfrac{\pi/3}{2/5} = \dfrac{\pi}{3}\cdot\dfrac{5}{2} = \dfrac{\pi\cdot 5}{3\cdot 2} = \dfrac{5\pi}{6}$

Question 19

a)
$$\begin{aligned}
\frac{\frac{4}{5}-\frac{1}{2}}{4/5} &= \frac{\frac{8}{10}-\frac{5}{10}}{4/5} && (F7)\\
&= \left(\frac{8}{10}-\frac{5}{10}\right)\cdot\frac{5}{4} && (F9)\\
&= \frac{3}{10}\cdot\frac{5}{4} && (F6)\\
&= \frac{3\cdot 5}{10\cdot 4} && (F8)\\
&= \frac{3\cdot 1}{2\cdot 4} && (F5)\\
&= \frac{3}{8}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} &= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} && (F7)\\
&= \frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{6}} && (F6)\\
&= \frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7} && (F9)\\
&= \frac{24}{35} && (F8)
\end{aligned}$$

Question 20

a)
$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\frac{1}{3}\\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{3}\frac{3}{4} && \text{(Commutativité)}\\
&= \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)\frac{3}{4} && \text{(Associativité)}\\
&= \left(\frac{2+1}{3}\right)\frac{3}{4} && \text{(F6)}\\
&= \left(\frac{3}{3}\right)\frac{3}{4} && (2+1=3)\\
&= (1)\,\frac{3}{4} && \text{(F5)}\\
&= \frac{3}{4} && \text{(Produit par 1)}
\end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned}
\frac{2/5}{2}+\frac{3}{5} &= \frac{2/5}{2/1}+\frac{3}{5} && \text{(F1)}\\
&= \frac{2}{5}\frac{1}{2}+\frac{3}{5} && \text{(F9)}\\
&= \frac{2\cdot 1}{5\cdot 2}+\frac{3}{5} && \text{(F8)}\\
&= \frac{1}{5}+\frac{3}{5} && \text{(F5)}\\
&= \frac{1+3}{5} && \text{(F6)}\\
&= \frac{4}{5} && (1+3=4)
\end{aligned}$$

Question 21

a) $(2\times 3)\div 4$

b) $2\times 3\div 4$

c) $(2\times 3)\div 4$

d) $(2\times 3)\div(4\times 5)$

e) $(2+3)\div(4+5)$

f) $(2\div 3)\div(4\div 5)$

g) $1\div(1+1\div(1+1\div 2))$

Question 22

a) $2\times\frac{3}{4}$

b) $\frac{2\times 3}{4}$

c) $\frac{2\times 3}{4}$

d) $2\times\frac{3}{4}\times 5$

e) $2\times\frac{3}{4\times 5}$

f) $\frac{2\times 3}{4\times 5}$

g) $\frac{2/3}{4}$

h) $\frac{2}{3/4}$

i) $\dfrac{\frac{2/3}{4}}{5}$

j) $\frac{2/3}{4/5}$

Question 23

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{2}{5}$

c) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{3}{5}$

e) $\frac{3}{10}$

f) $\frac{2}{5}$

g) $\frac{1}{2}$

h) $\frac{1}{2}$

i) 27

j) $\frac{12}{17}$

k) $\frac{9}{20}$

l) $\frac{13}{9}$

m) $\frac{7}{3}$

n) $\frac{5}{2}$

o) $\frac{6}{7}$

p) $\frac{8}{3}$

q) $\frac{3}{7}$

Question 24

a) 2

b) $\dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{3\pi}{2}$

d) $\dfrac{3\pi}{4}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\frac{2}{5}$

h) $\dfrac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}+4}$

i) $\dfrac{1}{2}$

j) $\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}+4}$

k) $\dfrac{2\sqrt{2}+2}{4} = \dfrac{2\left(\sqrt{2}+1\right)}{4} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

Question 25

a) $\dfrac{3}{10}$

b) $\dfrac{3}{5}$

c) 75

d) 36

e) $\dfrac{5}{27}$

f) $\dfrac{4}{5}$

g) $\dfrac{-4}{9}$

h) $\dfrac{10}{9}$

i) 10

j) $\dfrac{15}{4}$

k) $\dfrac{3}{20}$

l) $\dfrac{1}{14}$

m) $\dfrac{1}{18}$

n) $\dfrac{12}{25}$

o) $\dfrac{7}{6}$

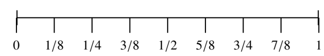
p) $\dfrac{6}{7}$

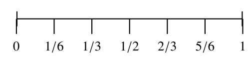
q) $\dfrac{4}{5}$

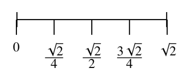
r) $\dfrac{13}{22}$

s) $\dfrac{5}{3}$

Question 26

a) 

b) 

c) 

Question 27

a) 96

b) 30

c) 24

d) 42

e) 3139

f) $2^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13\cdot 17 = 154700$

g) 48

h) $2^5\cdot 3\cdot 5\cdot 7^2 = 23520$

Question 28

a) $\frac{9}{12}$ et $\frac{2}{12}$

b) $\frac{2}{10}$ et $\frac{1}{10}$

c) $\frac{4}{30}$ et $\frac{9}{30}$

d) $\frac{9}{42}$ et $\frac{10}{42}$

Question 29

a) $\frac{9}{24}+\frac{10}{24} = \frac{19}{24}$

b) $\frac{10}{24}-\frac{15}{24} = -\frac{5}{24}$

c) $\frac{6}{12}+\frac{4}{12}+\frac{3}{12} = \frac{13}{12}$

d) $\frac{6}{12}-\frac{4}{12}+\frac{3}{12} = \frac{5}{12}$

e) $\frac{7}{4}$

f) $\frac{17}{32}$

g) $\frac{12}{5}$

h) $\frac{11}{4}$

i) $\frac{13}{8}$

Question 30

a) $\dfrac{12}{35}$

b) $\dfrac{7}{6}$

c) $\dfrac{1}{6}$

d) $\dfrac{19}{60}$

Question 31

a) $\frac{5}{4}$

b) $\frac{25}{36}$

c) $\frac{5\cdot\cancel{5}}{2\cdot\cancel{13}}\frac{\cancel{13}}{3\cdot\cancel{5}} =$ $\frac{5}{6}$

d) $\frac{15}{12}$

e) $\frac{9}{35}$

f) $\frac{5}{7}$

Question 32

a) $\frac{47}{30}$

b) 5

c) $1/7$

d) $13/22$

e) $-\frac{1}{49}$

f) -49

g) $\frac{3}{10}$

h) $\frac{13}{105}$

i) $\frac{4}{5}$

j) $-\frac{1}{27}$

k) $\frac{3}{5}$

Question 33

a) $16/5$

b) $2^2 3^2(5) = 180$

c) $3/2^3 = \frac{3}{8}$

d) $31/35$

e) $-2/15$

f) $30/41$

g) 0

Question 34

a) $\frac{5}{8}$ b) $\frac{5}{12}$ c) $\frac{5}{12}$ d) $\frac{3}{20}$

Question 35

a) $\frac{3}{5} < \frac{5}{8} < \frac{2}{3}$

b) $\frac{2}{5} < \frac{5}{12} < \frac{3}{7}$

c) $\frac{1}{5} < \frac{2}{7} < \frac{3}{8}$

Question 36

a) $\frac{1}{8} < \frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < \frac{15}{32} < \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} < \frac{9}{16} < \frac{39}{64} < \frac{5}{8} < \frac{21}{32}$

Question 37

a) $\overline{4}+\overline{4} = = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \overline{2}$

b) $\overline{3}+\overline{4} = = \frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{4}{12}+\frac{3}{12} = \frac{7}{12} = \frac{6}{12}+\frac{1}{12} = \frac{1}{2}+\frac{1}{12} = \overline{2}+\overline{12}$

c) $\frac{3}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \overline{2}+\overline{4}$

d) $\frac{5}{6} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \overline{2}+\overline{3}$

e) $\overline{3}+\overline{5} = \frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{5}{15}+\frac{3}{15} = \frac{8}{15} = \frac{1}{2}+\frac{1}{30} = \overline{2}+\overline{30}$

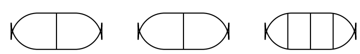
Si vous avez tenté de faire cette addition en n'utilisant que la notation égyptienne, vous vous êtes probablement rendu compte qu'il manque certains éléments. Les égyptiens utilisaient des tables d'addition de fraction où certaines sommes étaient connues.

Question 38

a) 3 pains divisés entre 4 travailleurs :

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}.$$

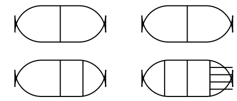
On coupe donc les deux premiers pains en deux, ce qui donne quatre demi-pains, et on coupe le pain qui reste en 4, ce qui ajoute quatre quart de pain. Chaque travailleur reçoit donc $\frac{1}{2}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ de pain en manipulant 8 morceaux de pain.



b)

$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

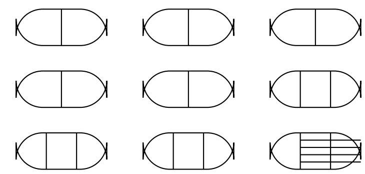
Cette manière de diviser les quatre pains créé 15 morceaux.



c)

$$\frac{9}{10} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

Cette manière de découper les neufs pains donne 30 morceaux à distribuer.



Question 39

$\frac{1}{A/B}\,\frac{B}{A}$ car

$$\frac{B}{A}\frac{A}{B} = \frac{BA}{AB} = 1.$$

Question 40

$$-\frac{A}{B} = (-1)A\frac{1}{B} = (-A)\frac{1}{B} = \frac{-A}{B}$$