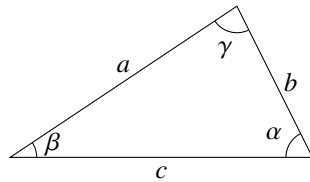


Loi des sinus et loi des cosinus

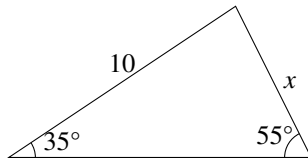
1. Loi des sinus

Théorème 1 (Loi des sinus). Dans un triangle quelconque, le rapport des côtés sur les sinus des angles opposés est constant.



$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}.$$

Exemple 1. Déterminer la mesure manquante dans le triangle suivant.



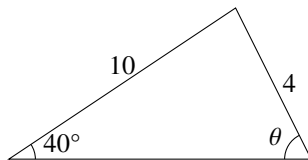
Par la loi des sinus, on a que

$$\frac{x}{\sin(35)} = \frac{10}{\sin(55)}$$

On isole la mesure inconnue x :

$$x = \frac{10 \sin(35)}{\sin(55)}$$

Exemple 2. Déterminer l'angle θ dans le triangle suivant.



Par la loi des sinus, on a que

$$\frac{10}{\sin(\theta)} = \frac{4}{\sin(40)}$$

On isole la mesure inconnue x :

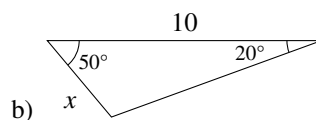
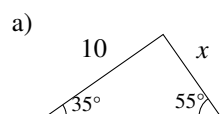
$$\frac{\sin(\theta)}{10} = \frac{\sin(40)}{4}$$

$$\sin(\theta) = \frac{10 \sin(40)}{4}$$

$$\theta = \arcsin\left(\frac{10 \sin(40)}{4}\right)$$

Question 1

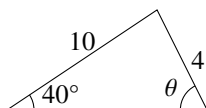
Déterminer la longueur du côté x dans les triangles suivants.



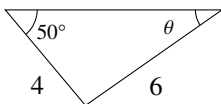
Question 2

Déterminer l'angle θ dans les triangles suivants.

a)

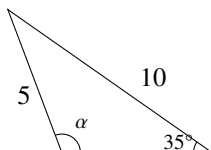


b)



Note. Dans certaines situations, la fonction arcsinus ne permet pas de trouver l'angle cherché. Cela est dû au fait que l'arcsinus est toujours un angle entre 0° et 90°.

Par exemple, tentons de déterminer l'angle α dans la figure suivante :



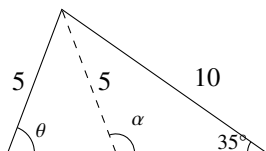
Par la loi des sinus, on doit avoir que

$$\frac{\sin(35^\circ)}{5} = \frac{\sin(\alpha)}{10}$$

et donc que

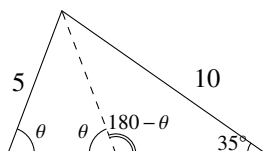
$$\alpha = \arcsin\left(\frac{10 \sin(35^\circ)}{5}\right) \approx 69,826^\circ.$$

Pourtant, selon la figure l'angle cherché devrait être plus grand qu'un angle droit. La situation s'explique par le fait qu'il y a deux triangles compatibles avec les mesures données.



La fonction arcsinus donnant toujours un angle entre 0° et 90°, le calcul précédent nous donne l'angle α du plus grand des deux triangles.

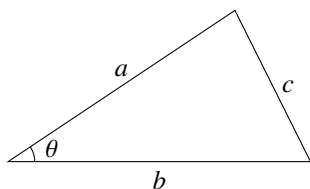
On peut trouver l'autre angle (plus grand qu'un angle droit) de la manière suivante :



L'angle cherché est donc $180^\circ - \theta \approx 180^\circ - 69,826^\circ \approx 122,069^\circ$.

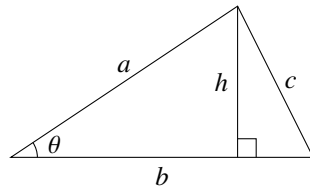
2. Loi des cosinus

Théorème 2 (Loi des cosinus). Dans un triangle quelconque,

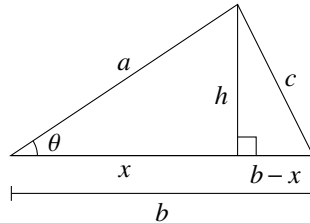


$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta).$$

Preuve. On trace la hauteur du triangle perpendiculaire à la base.



On divise ensuite la base b en deux parties de longueur x et $b - x$:



La relation de Pythagore dans le triangle de gauche et le triangle de droite donne respectivement :

$$a^2 = x^2 + h^2 \quad c^2 = (b-x)^2 + h^2$$

En comme $(b-x)^2 = b^2 - 2bx + x^2$, on peut transformer la seconde équation de la manière suivante et isoler h^2 dans chacune des équations :

$$\begin{aligned} a^2 &= x^2 + h^2 & c^2 &= b^2 - 2bx + x^2 + h^2 \\ h^2 &= a^2 - x^2 & h^2 &= c^2 - (b^2 - 2bx + x^2) \\ h^2 &= a^2 - x^2 & h^2 &= c^2 - b^2 + 2bx - x^2 \end{aligned}$$

Comme h^2 est la même valeur dans chaque équations, on doit avoir que

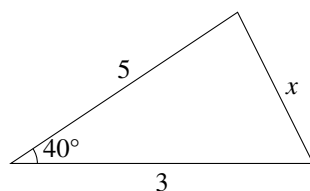
$$\begin{aligned} a^2 - x^2 &= c^2 - b^2 + 2bx - x^2 \\ a^2 &= c^2 - b^2 + 2bx \end{aligned}$$

Enfin, dans le triangle de gauche, on a que $\cos(\theta) = \frac{x}{a}$ et donc que $x = a \cos(\theta)$. En substituant dans la dernière équation trouvée, on trouve la loi des cosinus :

$$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - b^2 + 2bx \\ a^2 &= c^2 - b^2 + 2b(a \cos(\theta)) \\ a^2 &= c^2 - b^2 + 2ab \cos(\theta). \end{aligned}$$

□

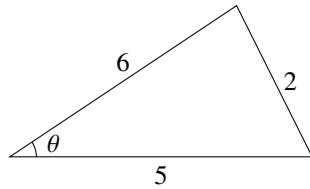
Exemple 3. Déterminer la mesure manquante dans le triangle suivant.



On applique la loi des cos :

$$\begin{aligned} x^2 &= 5^2 + 3^2 - 2(5)(3) \cos(40) \\ x &= \sqrt{5^2 + 3^2 - 2(5)(3) \cos(40)} \end{aligned}$$

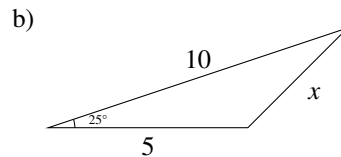
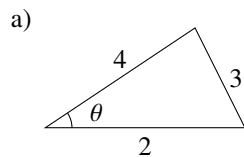
Exemple 4. Déterminer l'angle θ dans le triangle suivant.



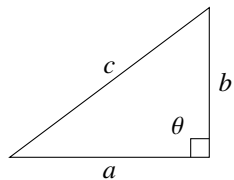
On applique la loi des cos :

Question 3

Déterminer la mesure manquante, l'angle θ ou le côté x , dans les triangles suivants.



Note. Dans un triangle rectangle, la loi des cosinus est équivalente au théorème de Pythagore car $\cos(\text{angle droit}) = 0$:



$$\text{Loi des cosinus : } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\theta)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab(0)$$

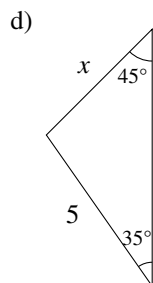
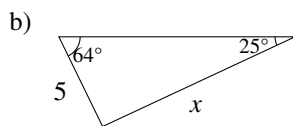
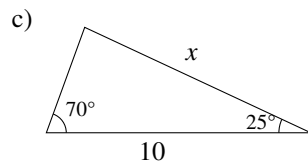
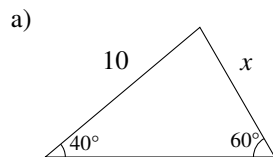
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{Théorème de Pythagore : } c^2 = a^2 + b^2$$

Exercices supplémentaires

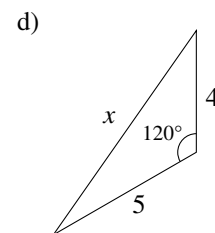
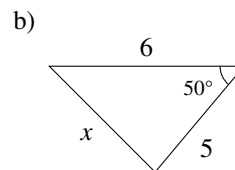
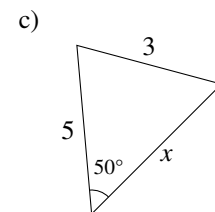
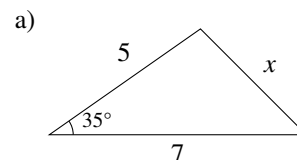
Question 4

Poser la loi des sinus nécessaire pour déterminer le côté X dans les figures suivantes, si cela est possible.



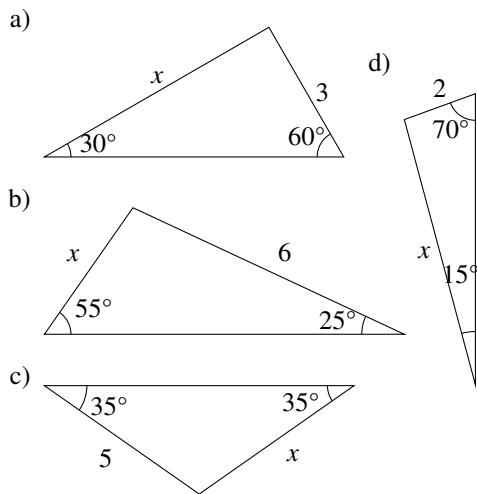
Question 5

Poser la loi des cosinus nécessaire pour déterminer le côté X ou l'angle θ dans les figures suivantes, si cela est possible.



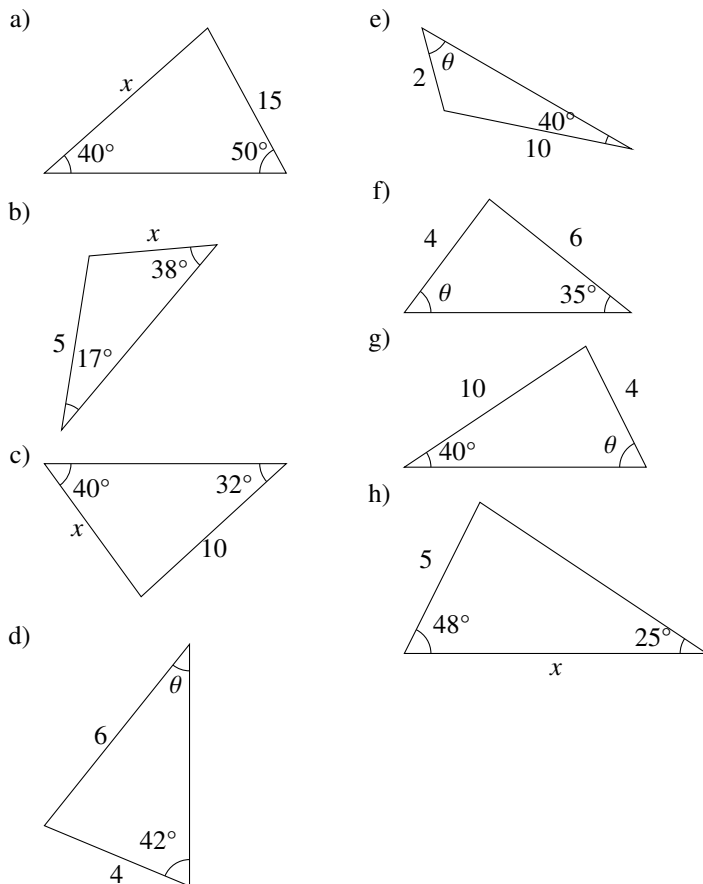
Question 6

Utiliser la loi des sinus pour déterminer le côté inconnu dans les figures suivantes.



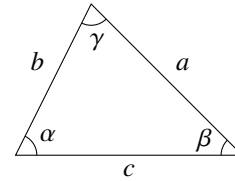
Question 7

Déterminer la mesure manquante (θ ou x) dans les triangles suivants.



Question 8

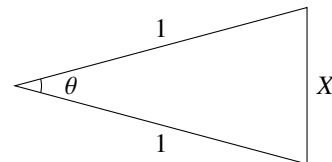
Déterminer la valeur demandée ; donner une valeur exacte.



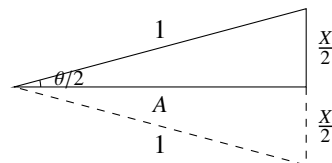
- Si $\alpha = \frac{\pi}{4}$ rad, $\beta = \frac{\pi}{6}$ rad et $a = 6$, trouver b .
- Si $\alpha = \frac{\pi}{3}$ rad, $\beta = \frac{\pi}{4}$ rad et $a = 4$, trouver c .
- Si $a = 5$, $b = 7$ et $\gamma = \frac{\pi}{3}$ rad, trouver c .
- Si $a = 3$, $b = 4$ et $\gamma = \frac{\pi}{2}$ rad, trouver c .
- Si $\alpha = \frac{\pi}{6}$ rad, $\beta = \frac{\pi}{4}$ rad et $c = 8$, trouver a .
- Si $a = 6$, $c = 8$ et $\beta = \frac{\pi}{4}$ rad, trouver b .

Question 9

- Utiliser la loi des cosinus pour déterminer la grandeur X du côté manquant. L'angle θ est de $\frac{\pi}{6}$ rad. Donner la valeur exacte.



- Montrer à l'aide du théorème de Pythagore et du résultat obtenu en a) que le côté A est $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.



Solutions

Question 1

- a) $x = \frac{10 \sin(35^\circ)}{\sin(55^\circ)} \approx 7,002$
 b) Le troisième angle du triangle est $180^\circ - 50^\circ - 20^\circ = 110^\circ$. La loi des sinus donne

$$\frac{10}{\sin(110^\circ)} = \frac{x}{\sin(20^\circ)}$$

et donc

$$x = \frac{10 \sin(20^\circ)}{\sin(110^\circ)} \approx 3,640.$$

Question 2

- a) La loi des sinus donne que

$$\frac{\sin(40)}{4} = \frac{\sin(\theta)}{10}$$

et donc

$$\sin(\theta) = \frac{10 \sin(40)}{4}.$$

Enfin on a que

$$\theta = \arcsin\left(\frac{10 \sin(40)}{4}\right) \approx 92,073$$

- b) La loi des sinus donne que

$$\frac{\sin(50)}{6} = \frac{\sin(\theta)}{4}$$

et donc

$$\sin(\theta) = \frac{4 \sin(50)}{6} = \frac{2 \sin(50)}{3}.$$

Enfin on a que

$$\theta = \arcsin\left(\frac{2 \sin(50)}{3}\right) \approx 29,261$$

Question 3

- a) $3^2 = 2^2 + 4^2 - 2 \cdot 2 \cdot 4 \cos(\theta)$

$$3^2 - 2^2 - 4^2 = -2 \cdot 2 \cdot 4 \cos(\theta)$$

$$\frac{3^2 - 2^2 - 4^2}{-2 \cdot 2 \cdot 4} = \cos(\theta)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{3^2 - 2^2 - 4^2}{-2 \cdot 2 \cdot 4}\right)$$

$$\theta \approx 46,57^\circ$$

- b) $x^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cos(25^\circ)$

$$x = \sqrt{5^2 + 10^2 - 2 \cdot 5 \cdot 10 \cos(25^\circ)}$$

$$x \approx 5,86$$

Question 4

a) $\frac{x}{\sin(40^\circ)} = \frac{10}{\sin(60^\circ)}$

b) $\frac{x}{\sin(64^\circ)} = \frac{5}{\sin(25^\circ)}$

- c) Impossible de résoudre ce triangle avec la loi des sinus.

d) $\frac{x}{\sin(35^\circ)} = \frac{5}{\sin(45^\circ)}$

Question 5

- a) $x^2 = 5^2 + 7^2 - 2(5)(7) \cos(35^\circ)$
 b) $x^2 = 5^2 + 6^2 - 2(5)(6) \cos(50^\circ)$
 c) Impossible avec la loi des cosinus.
 d) $x^2 = 5^2 + 4^2 - 2(5)(3) \cos(120^\circ)$

Question 6

- a) $x = 5,196$
 b) $x = 3,095$
 c) $x = 5$
 d) $x = 5$

Question 7

- a) $x \approx 17,876$
 b) $x \approx 2,374$
 c) $x \approx 22,918$
 d) $\theta =$

Question 8

- a) $b = 6 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)}$
 $= 6 \frac{1/2}{\sqrt{2}/2}$
 $= \frac{6}{\sqrt{2}}$
 $= 3\sqrt{2}$
 b) $\gamma = \pi - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$
 $= \frac{5\pi}{12}$
 $c = 4 \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}$
 $= 4 \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4}{\sqrt{3}/2}$
 $= \frac{2(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\sqrt{3}}$

- c) $c^2 = 5^2 + 7^2 - 2 \cdot 5 \cdot 7 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$
 $= 25 + 49 - 70 \cdot \frac{1}{2}$
 $= 39$

$$c = \sqrt{39}$$

- d) $c^2 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$
 $= 9 + 16 - 0$
 $= 25$

$$c = 5$$

e) $\gamma = \pi - \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}$
 $= \frac{7\pi}{12}$

$$a = 8 \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)}$$

$$= 8 \frac{1/2}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})/4}$$

$$= \frac{16}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$$

f) $b^2 = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
 $= 36 + 64 - 96 \frac{\sqrt{2}}{2}$
 $= 100 - 48\sqrt{2}$

$$b = \sqrt{100 - 48\sqrt{2}}$$

Question 9

- a) Par la loi des cosinus, on doit avoir que

$$X^2 = 1^2 + 1^2 - 2(1)(1) \cos(\theta)$$

$$X^2 = 1 + 1 - 2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$X^2 = 2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$X = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

- b) Par le théorème de Pythagore, le côté manquant A est

$$A = \sqrt{1^2 - \left(\frac{X}{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{X^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 - X^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 - \left(\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 - (2 - \sqrt{3})}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 - 2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 + \sqrt{3}}{4}}$$

$$= \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$