

# Vecteurs

## 1. Vecteurs

**Définition.** Un **vecteur**  $\vec{v}$  est une quantité orientée. Un vecteur a les trois caractéristiques suivantes :

**Longueur :**  $\|\vec{v}\|$

**Direction :** droite qui supporte le vecteur

**Sens :** le sens de parcourt de la droite support

**Note.**

Même longueur  
sens et direction  
différents



Même longueur,  
Même direction  
sens différents

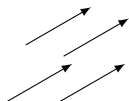


Même direction  
Même sens  
Longueur différentes



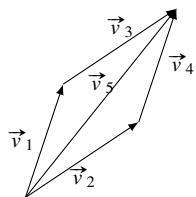
**Définition.** Deux vecteurs sont égaux quand ils ont la même longueur, la même direction et le même sens.

**Note.** On peut penser à un vecteur comme à un *déplacement* qui n'a pas d'origine spécifiée. Même si leur origines sont différentes, tous les vecteurs suivants sont égaux car ils ont la même longueur, la même direction et le même sens.



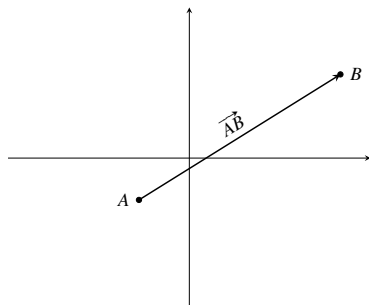
### Question 1

Identifier les vecteurs qui sont égaux dans la figure suivante. Les côtés opposés sont égaux et parallèles.



### 1.1. Vecteurs et points

**Définition.** Si  $A$  et  $B$  sont deux points du plan ou de l'espace, le vecteur allant de  $A$  à  $B$  est noté  $\vec{AB}$ .

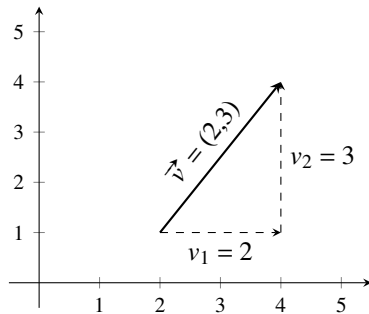


## 1.2. Forme cartésienne

**Définition.** La forme cartésienne d'un vecteur  $\vec{v}$  est la suivante :

$\vec{v} = (v_1, v_2)$  dans le plan ;  $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$  dans l'espace.

Les nombres  $v_1, v_2, v_3$ , etc, sont appelés les **composantes** du vecteur  $\vec{v}$ .



### Question 2

Faire une représentation graphique des vecteurs suivants en plaçant leur origine à l'origine du système de coordonnées.

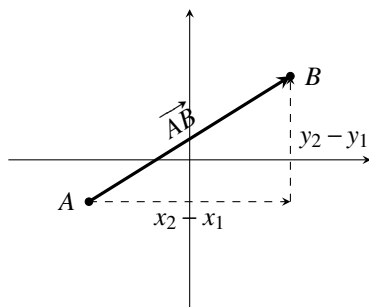
- a)  $\vec{v} = (2, 1)$       b)  $\vec{v} = (-1, 1)$       c)  $\vec{v} = (3, 0)$       d)  $\vec{v} = (0, -2)$

### Question 3

Faire un graphique montrant que si un point  $P$  est aux coordonnées cartésiennes  $(a, b)$ , alors le vecteur allant de  $(0, 0)$  à  $(a, b)$  est  $\vec{v} = (a, b)$ .

**Proposition 1.** Les composantes du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  allant du point  $A = (x_1, y_1)$  au point  $B = (x_2, y_2)$  sont

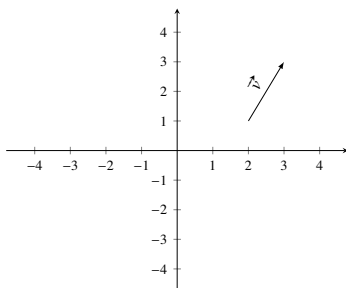
$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1).$$



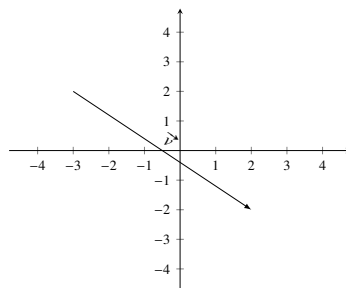
### Question 4

Donner la forme cartésienne des vecteurs suivants.

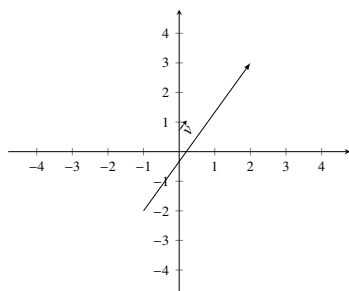
a)



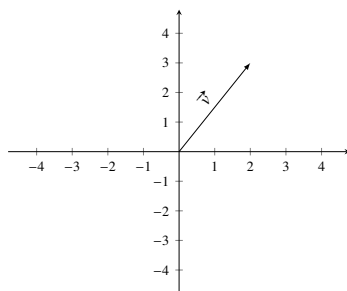
b)



c)



d)



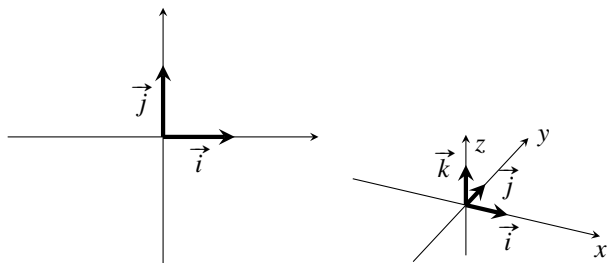
### 1.3. Vecteurs de base

#### Définition.

Tout vecteur peut être écrit comme une *combinaison linéaire* des vecteurs de base. La **base canonique** est composée des vecteurs suivants :

dans  $\mathbb{R}^2$  :  $\vec{i} = (1,0)$ ,  $\vec{j} = (0,1)$ ;

dans  $\mathbb{R}^3$  :  $\vec{i} = (1,0,0)$ ,  $\vec{j} = (0,1,0)$ ,  $\vec{k} = (0,0,1)$ .



**Proposition 2.** Tout vecteur du plan ou de l'espace est une **combinaison linéaire** des vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  :

$$(v_1, v_2) = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j};$$

$$(v_1, v_2, v_3) = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j} + v_3 \vec{k}.$$

#### Question 5

Écrire les vecteurs suivants comme des combinaisons linéaires des vecteurs  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$ .

a) (2,3)

c) (2, -3,4)

e) (0,1,0)

b) (2, -3)

d) (1,0)

f) (0,0)

### 1.4. Vecteur nul

**Définition.** Le **vecteur nul** est le vecteur  $\vec{0} \stackrel{\text{def}}{=} (0,0)$  dans le plan ou  $(0,0,0)$  dans l'espace.

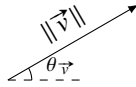
**Note.** Le vecteur nul correspond à ne pas se déplacer, ou au « déplacement nul ».

#### Question 6

Exprimer le vecteur nul dans la base  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  dans le plan et dans l'espace.

## 1.5. Représentation polaire

**Définition.** Dans le plan, la **représentation polaire** d'un vecteur  $\vec{v}$  est noté  $\vec{v} = L \angle \theta$ , où  $L$  est la longueur de  $\vec{v}$  et  $\theta$  son angle.

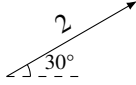


**Note.** Les notations suivantes sont aussi utilisées :

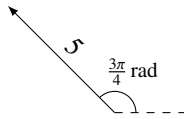
$$\|\vec{v}\| = \text{longueur de } \vec{v} \quad \theta_{\vec{v}} = \text{angle de } \vec{v}.$$

### Exemple 1.

Vecteur  $\vec{v} = 2 \angle 30^\circ$  :



Vecteur  $\vec{v} = 5 \angle \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$  :



### Question 7

Faire une représentation graphique des vecteurs suivants.

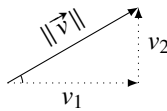
- |                                                     |                                                             |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| a) $\vec{v} = 3 \angle \frac{\pi}{6} \text{ rad}$   | c) $\vec{v} = \sqrt{2} \angle \pi \text{ rad}$              |
| b) $\vec{v} = 2 \angle -\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ | d) $\vec{v} = \frac{2}{3} \angle \frac{\pi}{2} \text{ rad}$ |

## 2. Norme

**Définition.** La **norme** d'un vecteur est sa longueur. Si les composantes d'un vecteur sont connues, on calcule sa norme de la manière suivante :

$$\|\vec{v}\| = \|(v_1, v_2)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \text{ dans } \mathbb{R}^2$$

$$\|\vec{v}\| = \|(v_1, v_2, v_3)\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \text{ dans } \mathbb{R}^3$$



### Question 8

Calculer la longueur des vecteurs suivants.

- |           |                                            |                                             |
|-----------|--------------------------------------------|---------------------------------------------|
| a) (4,3)  | c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ | e) $\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$ |
| b) (-6,8) | d) $(3\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$                | f) $(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})$                 |

### Question 9

Vérifiez que la norme de  $\vec{i}$  (dans l'espace) est 1.

**Question 10**

Vérifiez que la norme du vecteur  $\vec{0}$  est nulle.

**Proposition 3.**

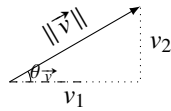
$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1, \|0\| = 0$$

### 3. Conversion entre les formes cartésiennes et polaires

#### 3.1. Forme cartésienne à polaire

**Proposition 4.** Si  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ , alors  $\vec{v} = \|\vec{v}\| \angle \theta_{\vec{v}}$ , où

$$\begin{aligned} \text{longueur} = \|\vec{v}\| &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \\ \text{angle} = \theta_{\vec{v}} &= \begin{cases} \arctan\left(\frac{v_2}{v_1}\right) & \text{si } v_1 > 0 \\ \arctan\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \pi \text{ rad} & \text{si } v_1 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$



**Exemple 2.** Convertir en représentation polaire le vecteur  $\vec{v} = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} & \theta_{\vec{v}} &= \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \sqrt{2+2} & &= \arctan(1) \\ &= \sqrt{4} & &= \frac{\pi}{4} \text{ rad.} \\ &= 2. & & \end{aligned}$$

La représentation polaire de  $\vec{v}$  est donc

$$\vec{v} = 2 \angle \frac{\pi}{4} \text{ rad.}$$

**Exemple 3.** Convertir en représentation polaire le vecteur  $\vec{v} = (-1, -\sqrt{3})$ .

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| &= \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} & \theta_{\vec{v}} &= \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) \\ &= \sqrt{1+3} & &= \arctan(\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{4} & &= \frac{\pi}{3} \text{ rad.} \\ &= 2. & & \end{aligned}$$

Comme le vecteur est dans le troisième quadrant ( $x < 0$  et  $y < 0$ ), l'angle polaire doit être ajusté en ajoutant  $\pi$  :

$$\theta_{\vec{v}} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ rad.}$$

La représentation polaire de  $\vec{v}$  est donc

$$\vec{v} = 2 \angle \frac{4\pi}{3} \text{ rad.}$$

### Question 11

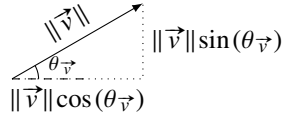
Convertir en représentation polaire les vecteurs suivants.

a)  $\vec{v} = (-2, -2)$       b)  $\vec{v} = (-3, 3)$       c)  $\vec{v} = (-1, -\sqrt{3})$

## 3.2. Forme polaire à cartésienne

**Proposition 5.** Si  $\vec{v} = \|\vec{v}\| \angle \theta$ , alors  $\vec{v} = (v_1, v_2)$  où

$$v_1 = \|\vec{v}\| \cos(\theta), \quad v_2 = \|\vec{v}\| \sin(\theta).$$



**Exemple 4.** Convertir  $\vec{v} = 5 \angle \frac{5\pi}{6}$  rad en coordonnées cartésiennes.

$$v_1 = \|\vec{v}\| \cos(\theta) = 5 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{5\sqrt{3}}{2};$$

$$v_2 = \|\vec{v}\| \sin(\theta) = 5 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{5}{2};$$

### Question 12

Convertir les vecteurs suivant en représentation cartésienne.

a)  $\vec{v} = 4 \angle \frac{\pi}{3}$       b)  $\vec{v} = 5 \angle \frac{\pi}{4}$       c)  $\vec{v} = 3 \angle \frac{2\pi}{3}$       d)  $\vec{v} = 6 \angle \frac{5\pi}{6}$

## 4. Opérations sur les vecteurs

### 4.1. Produit par un scalaire

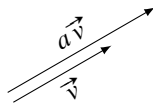
**Définition.** Un scalaire  $a$  est un nombre réel.

**Définition.** Le produit d'un vecteur  $\vec{v}$  par un scalaire  $a$  est défini de la manière suivante :

$$a\vec{v} = a(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} (av_1, av_2),$$

$$a\vec{v} = a(v_1, v_2, v_3) \stackrel{\text{def}}{=} (av_1, av_2, av_3).$$

**Proposition 6.** Multiplier un vecteur  $\vec{v}$  par un scalaire  $a$  change sa longueur par un facteur  $a$  :



**Exemple 5.** Calculer le produit par un scalaire suivant :  $3 \cdot (4, -5)$ .

$$\begin{aligned} 3 \cdot (4, -5) &= (3(4), 3(-5)) \\ &= (12, -15). \end{aligned}$$

**Proposition 7.** Le produit par un scalaire  $a$  d'un vecteur  $\vec{v} = \|\vec{v}\| \angle \theta$  en représentation polaire est obtenu en multipliant la longueur du vecteur  $\vec{v}$  par le scalaire :

$$a(\|\vec{v}\| \angle \theta) \stackrel{\text{def}}{=} (a\|\vec{v}\|) \angle \theta.$$

**Exemple 6.** Calculer le produit du scalaire 3 et du vecteur  $2 \angle \frac{\pi}{3} \text{ rad}$ .

$$3 \cdot \left( 2 \angle \frac{\pi}{3} \text{ rad} \right) = 6 \angle \frac{\pi}{3} \text{ rad}$$

### Question 13

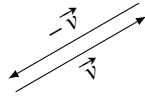
Calculer les produits par un scalaire.

- |                       |                      |                                                                  |
|-----------------------|----------------------|------------------------------------------------------------------|
| a) $2 \cdot (3, 2)$   | c) $5 \cdot \vec{0}$ | e) $3 \cdot \left( 4 \angle \frac{\pi}{3} \text{ rad} \right)$   |
| b) $-3 \cdot (-1, 2)$ | d) $0 \cdot (2, 3)$  | f) $-2 \cdot \left( 3 \angle \frac{5\pi}{6} \text{ rad} \right)$ |

**Proposition 8.** Multiplier par un scalaire négatif inverse le sens d'un vecteur.

Multiplier un vecteur  $\vec{v}$  par  $-1$  donne un vecteur de même longueur et direction que  $\vec{v}$ , mais de sens opposé. On note ce vecteur  $-\vec{v}$ .

$$-\vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} (-1)\vec{v}$$



### Question 14

Calculer  $-\vec{v}$  pour les vecteurs suivants.

- |              |               |                                             |
|--------------|---------------|---------------------------------------------|
| a) $-(2, 1)$ | b) $-(-1, 3)$ | c) $-\left( \sqrt{2}, -\frac{1}{2} \right)$ |
|--------------|---------------|---------------------------------------------|

### Question 15

Vérifier que  $\|a \cdot \vec{v}\| = |a| \|\vec{v}\|$  pour...

- |                               |                                |
|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $a = 2, \vec{v} = (3, -4)$ | b) $a = -2, \vec{v} = (3, -4)$ |
|-------------------------------|--------------------------------|

**Proposition 9.** Pour tout scalaire  $a$  et vecteur  $\vec{v}$ , on a que

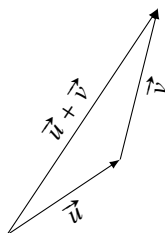
$$\|a\vec{v}\| = |a| \|\vec{v}\|.$$

## 4.2. Somme de vecteurs

**Définition.** La somme de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est définie dans le plan et dans l'espace par

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2) + (v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, u_2 + v_2),$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) \stackrel{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3).$$



**Note.** La somme de deux vecteurs considérés comme des déplacements correspond à faire deux déplacements consécutifs.

### Question 16

Calculer les sommes de vecteurs suivantes.

- a)  $(1,2) + (3,4)$                       c)  $2\vec{i} - 3\vec{k}$   
b)  $(1,2) + (-3,4)$                       d)  $(\sqrt{2}, -\frac{2}{3}) + \vec{0}$

### Question 17

Représenter graphiquement les sommes de vecteurs suivantes.

- a)  $(2,1) + (1,2)$                       c)  $(1,-3) + (2,4)$   
b)  $(-1,2) + (3,-1)$                       d)  $(-2,-1) + (-1,3)$

### Question 18

Montrer géométriquement pourquoi  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

**Proposition 10.** La somme d'un vecteur  $\vec{v}$  avec le vecteur nul est  $\vec{v}$  :

$$\begin{aligned}\vec{v} + \vec{0} &= \vec{v} \\ \vec{0} + \vec{v} &= \vec{v}\end{aligned}$$

### Question 19

Vérifier que la proposition précédente est vraie pour  $\vec{v} = (2, -1)$ .

## 4.3. Inverse additif d'un vecteur

**Définition.** L'inverse d'un vecteur  $\vec{v}$  est le vecteur  $-\vec{v}$  de même longueur que  $\vec{v}$ , de même direction que  $\vec{v}$  mais de sens opposé à  $\vec{v}$ .



**Proposition 11.** En coordonnées cartésiennes, l'inverse est défini par

$$\begin{aligned}-\vec{v} &= -(v_1, v_2) \stackrel{\text{def}}{=} (-v_1, -v_2), \\ -\vec{v} &= -(v_1, v_2, v_3) \stackrel{\text{def}}{=} (-v_1, -v_2, v_3),\end{aligned}$$

### Question 20

Déterminer l'inverse additif des vecteurs suivants.

- a)  $(2,3)$                       b)  $(3,-1)$                       c)  $(\sqrt{2}, \frac{3}{4})$                       d)  $-\vec{0}$

**Question 21**

Calculer les sommes suivantes.

- a)  $-(2, 1) + (2, 1)$     b)  $(-1, 3) + -(-1, 3)$     c)  $-(\sqrt{2}, -\frac{1}{2}) + (\sqrt{2}, -\frac{1}{2})$

**Proposition 12.** Additionner un vecteur  $\vec{v}$  et son inverse  $-\vec{v}$  donne le vecteur nul.

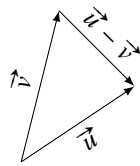
$$\vec{v} + -\vec{v} = \vec{0}$$

$$-\vec{v} + \vec{v} = \vec{0}$$

**4.3.1. Différence de vecteurs**

**Définition.** La différence des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est la somme de  $\vec{u}$  et de l'inverse additif de  $\vec{v}$  :

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-1)\vec{v}.$$



**Proposition 13.** Si  $\vec{u} = (u_1, u_2)$  et  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ , alors

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2).$$

**Question 22**

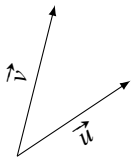
Effectuer les calculs suivants.

- a)  $(2, 1) - (3, 1)$     c)  $(-1, \sqrt{2}) - (2, \sqrt{2})$     e)  $\vec{i} - \vec{j}$   
 b)  $(-1, 3) - (2, 1)$     d)  $2(2, 1) - 3(-1, 2)$     f)  $2\vec{i} - 3\vec{j}$

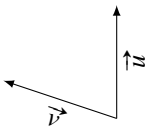
**Question 23**

Ajouter le vecteur différence  $\vec{u} - \vec{v}$  aux graphiques suivants.

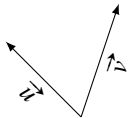
a)



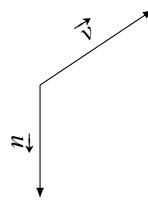
c)



b)



d)

**Question 24**

Si  $\vec{v} = (2, 3)$ , vérifiez que la longueur de  $2\vec{v}$  est le double de celle de  $\vec{v}$ .

**Proposition 14.**

$$\|a\vec{v}\| = |a|\|\vec{v}\|$$

## Exercices supplémentaires

### Question 25

Exprimer les vecteurs suivants en coordonnées polaires.

- a)  $\vec{v} = (\sqrt{10}, -\sqrt{10})$       d)  $\vec{v} = (2, 2\sqrt{3})$   
 b)  $\vec{v} = (\sqrt{3}, -1)$       e)  $\vec{v} = (\sqrt{3}, -3)$   
 c)  $\vec{v} = (-1, 0)$       f)  $\vec{v} = (\sqrt{3}, -\sqrt{3})$

### Question 26

Exprimer les vecteurs suivants en coordonnées rectangulaires.

- a)  $\vec{v} 3 \angle 120^\circ$       d)  $\vec{v} = \sqrt{2} \angle 135^\circ$   
 b)  $\vec{v} \angle -60^\circ$       e)  $\vec{v} = \sqrt{3} \angle -150^\circ$   
 c)  $\vec{v} = 1/2 \angle 90^\circ$

### Question 27

Soit  $\vec{u} = \frac{1}{2} \angle \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$ ,  $\vec{v} = (2, 1)$ ,  $\vec{w} = 2 \angle -\frac{3\pi}{4} \text{ rad}$ . Effectuer les calculs suivants.

- a)  $\vec{u} - \sqrt{2}\vec{w}$       c)  $\sqrt{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{1}{3}\vec{w}$   
 b)  $\sqrt{2}\vec{u} - \vec{w}$       d)  $\sqrt{2}\vec{v} - 3\vec{u} + \frac{2}{\sqrt{3}}\vec{w}$

### Question 28

Soit  $\vec{u} = (-2, 1)$ ,  $\vec{v} = (3, -4)$  et  $\vec{w} = (1, 5)$ . Effectuer les calculs suivants lorsque c'est possible. Sinon, expliquer pourquoi le calcul est impossible à effectuer.

- a)  $3\vec{v} - 2\vec{u}$       e)  $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$   
 b)  $2\vec{u} + \vec{w}$       f)  $2(\vec{u} + \vec{v})$   
 c)  $\vec{u} + 1$       g)  $\|\vec{u} + \vec{v}\|\vec{w}$   
 d)  $\|\vec{u}\|\vec{v}$

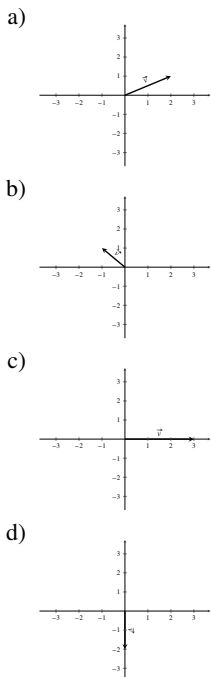
## Solutions

### Question 1

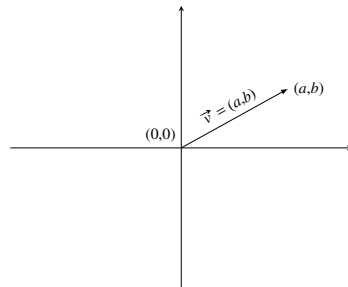
$$\vec{v}_1 = \vec{v}_4$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

### Question 2



### Question 3



### Question 4

- a)  $\vec{v} = (1, 2)$   
 b)  $\vec{v} = (5, -4)$   
 c)  $\vec{v} = (2, 3)$   
 d)  $\vec{v} = (2, 3)$

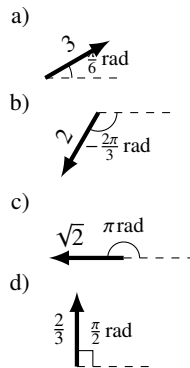
### Question 5

- a)  $(2, 3) = 2\vec{i} + 3\vec{j}$   
 b)  $(2, 3) = 2\vec{i} - 3\vec{j}$   
 c)  $(2, 3, 4) = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$   
 d)  $(1, 0) = 1\vec{i} + 0\vec{j}$   
 e)  $(0, 1, 0) = 0\vec{i} + 1\vec{j} + 0\vec{k}$   
 f)  $(0, 0) = 0\vec{i} + 0\vec{j}$

### Question 6

Plan :  $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j}$   
 Espace :  $\vec{0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

### Question 7



### Question 8

- a)  $\|(4, 3)\| = \sqrt{4^2 + 3^2}$   
 $= \sqrt{16 + 9}$   
 $= \sqrt{25}$   
 $= 5$
- b)  $\|(-6, 8)\| = \sqrt{(-6)^2 + 8^2}$   
 $= \sqrt{36 + 64}$   
 $= \sqrt{100}$   
 $= 10$
- c)  $\left\|\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2}$   
 $= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16}}$   
 $= \sqrt{\frac{4}{16} + \frac{9}{16}}$   
 $= \sqrt{\frac{13}{16}}$   
 $= \frac{\sqrt{13}}{4}$
- d)  $\|(3\sqrt{2}, 2\sqrt{3})\| = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{3})^2}$   
 $= \sqrt{9 \cdot 2 + 4 \cdot 3}$   
 $= \sqrt{18 + 12}$   
 $= \sqrt{30}$

$$\begin{aligned} \text{e) } \left\| \left( \frac{5}{3}, -\frac{4}{3} \right) \right\| &= \sqrt{\left( \frac{5}{3} \right)^2 + \left( -\frac{4}{3} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{16}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{41}{9}} \\ &= \frac{\sqrt{41}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \|(-\sqrt{5}, 2\sqrt{5})\| &= \sqrt{(-\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{5})^2} \\ &= \sqrt{5 + 4 \cdot 5} \\ &= \sqrt{5 + 20} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

### Question 9

$$\begin{aligned} \|(1, 0, 0)\| &= \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{1 + 0 + 0} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

### Question 10

$$\begin{aligned} \|(0, 0)\| &= \sqrt{0^2 + 0^2} \\ &= \sqrt{0 + 0} \\ &= \sqrt{0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

### Question 11

$$\begin{aligned} \text{a) } \|\vec{v}\| &= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} \\ &= \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{\vec{v}} &= \arctan\left(\frac{-2}{-2}\right) \\ &= \arctan(1) \\ &= \frac{\pi}{4} \text{ rad,} \end{aligned}$$

Comme  $x < 0$ ,  $\theta_{\vec{v}} = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$  rad, et donc

$$\vec{v} = 2\sqrt{2} \angle \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \|\vec{v}\| &= \sqrt{(-3)^2 + 3^2} \text{ Comme} \\ &= \sqrt{18} \\ &= 3\sqrt{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{\vec{v}} &= \arctan\left(\frac{3}{-3}\right) \\ &= \arctan(-1) \\ &= -\frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{aligned}$$

$x < 0$ , on a que  $\theta_{\vec{v}} = -\frac{\pi}{4} + \pi =$

$\frac{3\pi}{4}$  rad, et donc

$$\vec{v} = 3\sqrt{2} \angle \frac{3\pi}{4} \text{ rad.}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \|\vec{v}\| &= \sqrt{(-1)^2 + (-\sqrt{3})^2} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \arctan(\sqrt{3}) \\ &= \frac{\pi}{3} \text{ rad.} \end{aligned}$$

Comme  $x < 0$  :  $\theta_{\vec{v}} = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$  rad, et donc

$$\vec{v} = 2 \angle \frac{4\pi}{3} \text{ rad.}$$

### Question 12

$$\begin{aligned} \text{a) } v_1 &= 4 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= 4 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } v_1 &= 5 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= 5 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{5\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } v_1 &= 3 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_2 &= 3 \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } v_1 &= 6 \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= -3\sqrt{3} \\ v_2 &= 6 \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \\ &= 6 \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

### Question 13

- a) (6, 4)
- b) (3, -6)
- c) (0, 0)
- d) (0, 0)
- e)  $12 \angle \frac{\pi}{3}$  rad
- f)  $-6 \angle \frac{5\pi}{6}$  rad

### Question 14

- a) (-2, -1)
- b) (1, -3)
- c)  $(-\sqrt{2}, \frac{1}{2})$

### Question 15

$$\begin{aligned} \text{a) } \|a\vec{v}\| &= \|2 \cdot (3, -4)\| \\ &= \|(6, -8)\| \\ &= \sqrt{6^2 + (-8)^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \\ \|a\|\|\vec{v}\| &= 2\sqrt{3^2 + (-4)^2} \\ &= 2\sqrt{9 + 16} \\ &= 2\sqrt{25} \\ &= 2 \cdot 5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

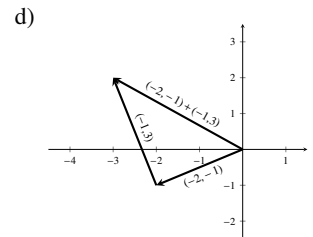
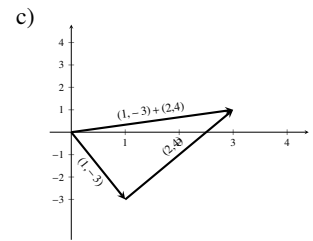
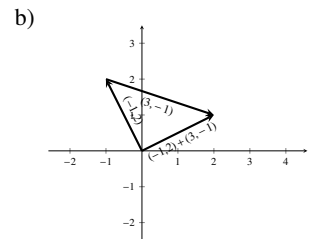
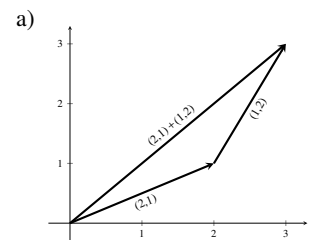
$$\begin{aligned} \text{b) } \|a\vec{v}\| &= \|-2 \cdot (3, -4)\| \\ &= \|(-6, 8)\| \\ &= \sqrt{(-6)^2 + 8^2} \\ &= \sqrt{36 + 64} \\ &= \sqrt{100} \\ &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|a\|\|\vec{v}\| &= |-2|\sqrt{3^2 + (-4)^2} \\ &= 2\sqrt{9 + 16} \\ &= 2\sqrt{25} \\ &= 2 \cdot 5 \\ &= 10 \end{aligned}$$

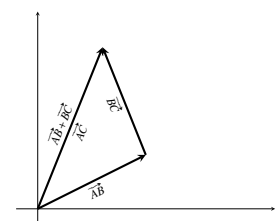
### Question 16

- a)  $(1, 2) + (3, 4) = (1 + 3, 2 + 4) = (4, 6)$
- b)  $(1, 2) + (-3, 4) = (1 - 3, 2 + 4) = (-2, 6)$
- c)  $2\vec{i} - 3\vec{j} = (2, 0) + (0, -3) = (2, -3)$
- d)  $\left(\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\right) + \vec{0} = \left(\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\right) + (0, 0) = \left(\sqrt{2} + 0, -\frac{2}{3} + 0\right) = \left(\sqrt{2}, -\frac{2}{3}\right)$

### Question 17



### Question 18



### Question 19

$$\vec{0} + \vec{v} = (0,0) + (2, -1) = (0 + 2, 0 + (-1)) = (2, -1)$$

$$\vec{v} + \vec{0} = (2, -1) + (0,0) = (2 + 0, (-1) + 0) = (2, -1)$$

### Question 20

- a)  $(-2, -3)$
- b)  $(-3, 1)$
- c)  $(-\sqrt{2}, \frac{3}{4})$
- d)  $(0,0) = \vec{0}$

### Question 21

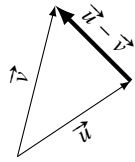
- a)  $\vec{0} = (0,0)$
- b)  $\vec{0}$
- c)  $\vec{0}$

### Question 22

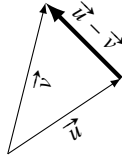
- a)  $(-1,0)$
- b)  $(-3,2)$
- c)  $(-3,0)$
- d)  $(10, -5)$
- e)  $(1, -1)$
- f)  $(2, -3)$

### Question 23

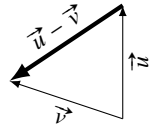
a)



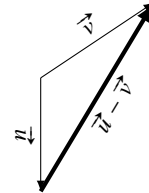
b)



c)



d)



### Question 24

$$\|(2,3)\| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{4+9}$$

$$= \sqrt{13}$$

$$\|2(2,3)\| = (4,6)$$

$$= \sqrt{(2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2}$$

$$= \sqrt{(2^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 3^2)}$$

$$= \sqrt{2^2(2^2 + 3^2)}$$

$$= \sqrt{2^2(13)}$$

$$= \sqrt{2^2} \sqrt{13}$$

$$= 2 \sqrt{13}$$

### Question 25

- a)  $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{5}, -45^\circ$
- b)  $\text{vecv} = 2\angle -30^\circ$
- c)  $\vec{v} = 1\angle 180^\circ$
- d)  $\vec{v} = 4\angle 60^\circ$
- e)  $\vec{v} = 2\sqrt{3}\angle -60^\circ$
- f)  $\vec{v} = \sqrt{6}\angle -45^\circ$

### Question 26

- a)  $(\frac{-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2})$
- b)  $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
- c)  $(0, \frac{1}{2})$
- d)  $(-1, 1)$
- e)  $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$

### Question 27

- a)  $(\frac{7}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} + 2)$
- b)  $(\sqrt{2} - \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2})$
- c)  $(\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{7}{2}, 2(\frac{\sqrt{3}}{4} + 1) + \frac{\sqrt{2}}{3})$
- d)  $(-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 3\sqrt{2} + 4, -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + 3\sqrt{2} + 2)$

### Question 28

- a)  $(13, -14)$
- b)  $(-3, 7)$
- c) Impossible : addition d'un vecteur et d'un scalaire.
- d)  $(\sqrt{5})(3, -4) = (3\sqrt{5}, -4\sqrt{5})$
- e)  $(0, -8)$
- f)  $(2, -6)$
- g)  $\sqrt{10}(1,5) = (\sqrt{10}, 5\sqrt{10})$