

Identités trigonométriques

1. Identités trigonométriques

Définition. Une **identité trigonométrique** est une égalité impliquant des fonctions trigonométriques qui est vraie pour toutes les valeurs possibles des angles impliquées.

Exemple 1. L'égalité

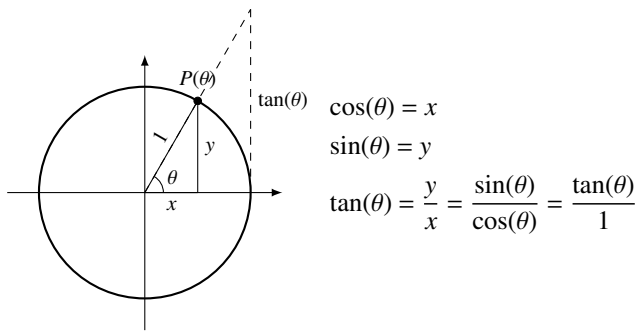
$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

est une identité trigonométrique.

Les identités trigonométriques sont toujours vraies à cause de relations géométriques pouvant être vérifiées dans le cercle trigonométrique et à l'aide des définitions des fonctions trigonométriques.

Cercle trigonométrique

Rappel. La définition des fonctions trigonométriques est donnée par le cercle trigonométrique de la manière suivante.



La définition de la fonction tangente est une première identité trigonométrique.

Proposition 1.

$$\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}.$$

On peut utiliser des identités trigonométriques connues et les propriétés algébriques pour trouver de nouvelles identités trigonométriques.

Exemple 2. On peut déduire directement de l'identité précédente le fait que

$$\sin(\theta) = \tan(\theta) \cos(\theta).$$

Question 1

Montrer que $\sin(\theta) + \cos(\theta) = \cos(\theta)(\tan(\theta) + 1)$ à partir de l'identité donnée dans le dernier exemple.

2. Identité de Pythagore

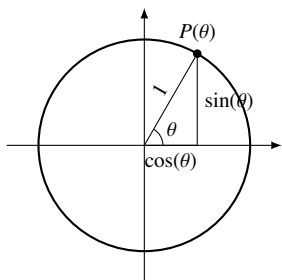
Note. On utilise la notation $\sin^2(\theta)$ pour écrire de manière plus rapide $(\sin(\theta))^2$.

De même, on utilise la notation $\cos^2(\theta)$ pour $(\cos(\theta))^2$ et $\tan^2(\theta)$ pour $(\tan(\theta))^2$.

On utilise aussi on utilise cette notation avec n'importe quel exposant : $\sin^3(\theta) = (\sin(\theta))^3$, $\tan^5(\theta) = (\tan(\theta))^5$, etc.

Proposition 2.

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$



Question 2

Vérifier que l'identité de Pythagore est vraie pour $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Question 3

Montrer que

$$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

à l'aide de l'identité de Pythagore.

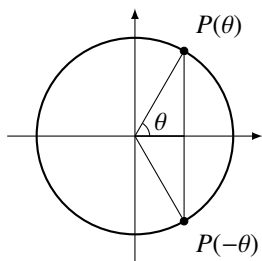
(ind. : Commencer avec l'identité contenant $\sin^2(\theta)$ et $\cos^2(\theta)$ et diviser par un dénominateur adéquat).

3. Parité

Proposition 3.

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$



Exemple 3.

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Question 4

Vérifier que les identités de parité sont vraies pour les angles suivants. Dans chacun des cas, illustrer l'égalité à l'aide du cercle trigonométrique.

a) $\theta = \pi$

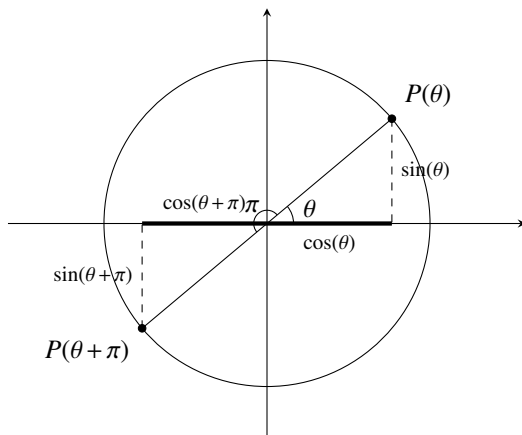
b) $\theta = \frac{\pi}{4}$

c) $\theta = \frac{5\pi}{6}$

4. Rotations et symétries

On peut obtenir plusieurs autres identités en effectuant des rotations et des symétries dans le cercle trigonométrique.

Exemple 4. Montrons que $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$ et que $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$ à l'aide du cercle trigonométrique.



Question 5

Montrer que $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta)$ et que $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$ à l'aide du cercle trigonométrique.

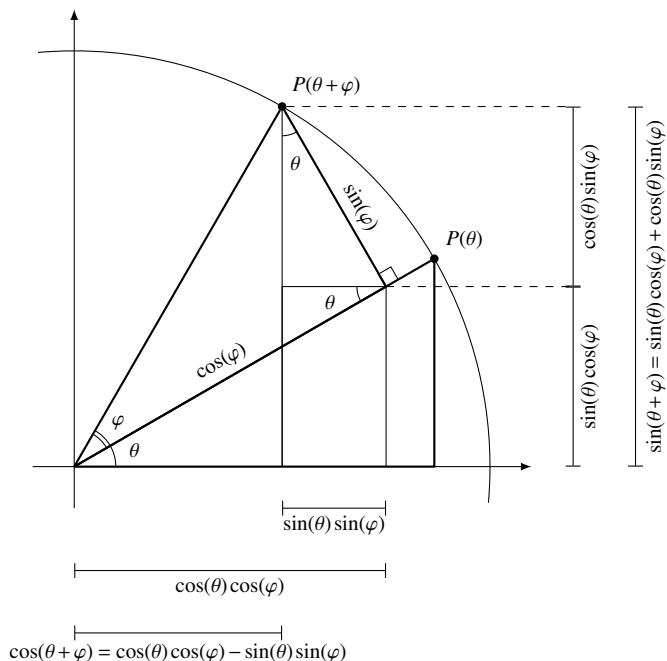
5. Sommes et différences d'angles

Proposition 4.

$$\sin(\theta + \varphi) = \sin(\theta)\cos(\varphi) + \cos(\theta)\sin(\varphi)$$

$$\cos(\theta + \varphi) = \cos(\theta)\cos(\varphi) - \sin(\theta)\sin(\varphi)$$

Preuve.



□

Exemple 5. Calculons $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ à l'aide du fait que $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ et des identités trigonométriques pour les sommes d'angles.

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}.\end{aligned}$$

Question 6

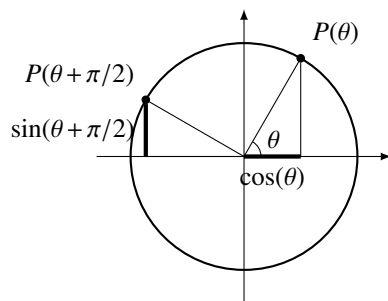
Utiliser les identités trigonométriques pour les sommes d'angles pour déterminer les valeurs suivantes.

a) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ b) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$ c) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ d) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$

Exemple 6. Utiliser les identités trigonométriques pour la somme d'angles afin de montrer que $\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$.

$$\begin{aligned}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sin(\theta)(0) + \cos(\theta)(1) \\ &= \cos(\theta)\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser le cercle trigonométrique pour montrer la même identité.



Question 7

Utiliser les identité trigonométrique pour la somme d'angles afin de montrer que $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$.

Question 8

Utiliser le cercle trigonométrique pour montrer que $\cos(\theta + \pi) = -\cos(\theta)$.

Question 9

Utiliser les identités trigonométriques $\sin(\alpha + \beta)$ et $\cos(\alpha + \beta)$ et la parité des fonctions sin et cos pour trouver les identités pour

- a) $\sin(\alpha - \beta)$ b) $\cos(\alpha - \beta)$ c) $\sin(2\theta)$ d) $\cos(2\theta)$

Exercices supplémentaires**Question 10**

Utiliser les identités trigonométriques pour les sommes d'angles pour déterminer les valeurs suivantes.

- a) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$ c) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$ e) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$
 b) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ d) $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$ f) $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right)$

Question 11

Démontrer les identités suivantes à l'aide du cercle trigonométrique.

- a) $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$ c) $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\theta)$
 b) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta)$ d) $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$

Question 12

Démontrer les identités suivantes à l'aide des identités pour les sommes d'angles.

- a) $\sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$ b) $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta)$

Question 13

Utiliser les identités trigonométriques pour les différences d'angles pour déterminer les valeurs suivantes.

- a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ c) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right)$ e) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$
 b) $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$ d) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ f) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$

Question 14

Démontrer les identités suivantes à l'aide des identités pour les sommes d'angles.

- a) $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$
 b) $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

Question 15

Utiliser les identités trigonométriques pour le double d'un angle trouvées à la dernière question pour déterminer les valeurs suivantes.

- a) $\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$ c) $\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)$ e) $\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$
 b) $\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right)$ d) $\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right)$ f) $\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right)$

Question 16

- a) Vérifier que $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

b) Utiliser la dernière égalité et les identités trigonométriques pour les sommes d'angles pour déterminer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Question 17

Démontrer les identités trigonométriques suivantes à l'aide des identités connues.

- a) $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ c) $\frac{\sin(3\theta)}{4\sin^3 \theta} = 3\sin \theta -$
 b) $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$

Question 18

Utiliser l'identité trigonométrique $\sin(\theta) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}}$ pour montrer que

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}.$$

Solutions

Question 1

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \tan(\theta) \cos(\theta) \\ \sin(\theta) + \cos(\theta) &= \tan(\theta) \cos(\theta) + \cos(\theta) \\ \sin(\theta) + \cos(\theta) &= \cos(\theta) (\tan(\theta) + 1)\end{aligned}$$

Question 2

$$\begin{aligned}\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) &= 1 \\ \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 1 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 &= 1 \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4} &= 1\end{aligned}$$

Question 3

On part de l'identité $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$. Si on divise chaque membre de cette égalité par $\cos^2(\theta)$, on obtient

$$\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} + \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)}.$$

En simplifiant et en utilisant les propriétés des fractions, cette dernière égalité devient

$$\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\cos(\theta)}\right)^2.$$

Par définition des fonctions $\tan(\theta)$ et $\sec(\theta)$, on obtient enfin que

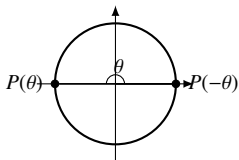
$$(\tan(\theta))^2 + 1 = (\sec(\theta))^2,$$

c'est à dire

$$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta).$$

Question 4

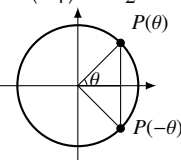
$$\begin{aligned}\text{a) } \sin(-\pi) &= 0 \\ -\sin(\pi) &= -0 = 0 \\ \cos(-\pi) &= -1 \\ \cos(\pi) &= -1\end{aligned}$$



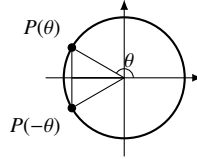
$$\begin{aligned}\text{b) } \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) &= -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) &= -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

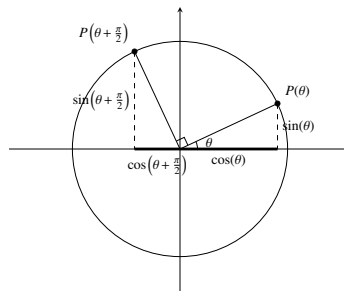
$$\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\begin{aligned}\text{c) } \sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right) &= -\frac{1}{2} \\ -\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= -\left(\frac{1}{2}\right) \\ \cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) &= -\left(\frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$



Question 5



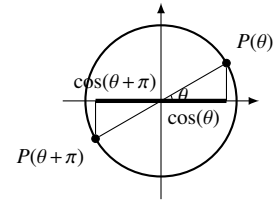
Question 6

$$\begin{aligned}\text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= (1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \text{b) } \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \\ &= 1 \\ \text{c) } \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \\ \text{d) } \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= 0\end{aligned}$$

Question 7

$$\begin{aligned}\cos(\theta + \pi) &= \cos(\theta)\cos(\pi) - \sin(\theta)\sin(\pi) \\ &= \cos(\theta)(-1) - \sin(\theta)(0) \\ &= -\cos(\theta)\end{aligned}$$

Question 8



Question 9

- Appliquer l'identité pour $\sin(\alpha + \beta)$ à $\alpha + (-\beta)$ et simplifier pour obtenir $\sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
- $\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
- Appliquer l'identité pour $\sin(\alpha + \beta)$ à $\theta + \theta$ pour et simplifier pour obtenir $2\sin(\theta)\cos(\theta)$
- $\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$

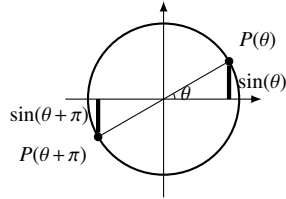
Question 10

$$\begin{aligned}\text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \text{b) } \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \text{c) } \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)(0) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{d) } \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \text{e) } \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

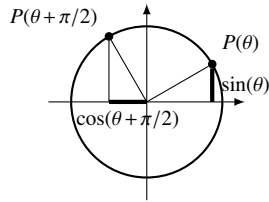
$$\begin{aligned} \text{f) } \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0) - \left(\frac{1}{2}\right)(1) \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Question 11

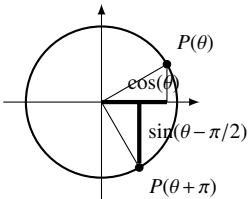
a)



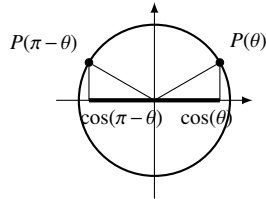
b)



c)



d)



Question 12

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(\theta + \pi) &= \sin(\theta)\cos(\pi) + \cos(\theta)\sin(\pi) \\ &= \sin(\theta)(-1) + \cos(\theta)(0) \\ &= -\sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) &= \cos(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \cos(\theta)(0) - \sin(\theta)(1) \\ &= -\sin(\theta) \end{aligned}$$

Question 13

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= (1)\left(\frac{1}{2}\right) - (0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= (0)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + (1)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Question 14

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin(2\theta) &= \sin(\theta + \theta) \\ &= \sin(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) \\ &= 2\sin(\theta)\cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos(2\theta) &= \cos(\theta + \theta) \\ &= \cos(\theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\sin(\theta) \\ &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{aligned}$$

Question 15

$$\begin{aligned} \text{a) } \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= 2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2\left(\frac{2}{4}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Question 16

$$\text{a) } \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} + \left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

Question 17

$$\begin{aligned} \text{a) } \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ \cos(2\theta) &= (1 - \sin^2(\theta)) - \sin^2(\theta) \\ \cos(2\theta) &= 1 - 2\sin^2(\theta) \\ 2\sin^2(\theta) &= 1 - \cos(2\theta) \\ \sin^2(\theta) &= \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \\ \cos(2\theta) &= \cos^2(\theta) - (1 - \cos^2(\theta)) \\ \cos(2\theta) &= 2\cos^2(\theta) - 1 \\ 2\cos^2(\theta) &= 1 + \cos(2\theta) \\ \cos^2(\theta) &= \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \end{aligned}$$

c) On utilise trois identités suivantes :

$$\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta),$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta).$$

$$\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta).$$

$$\sin(3\theta) = \sin(2\theta + \theta)$$

$$= \sin(2\theta) \cos(\theta) + \cos(2\theta) \sin(\theta)$$

$$= (2 \sin(\theta) \cos(\theta)) \cos(\theta) + (1 - 2 \sin^2(\theta)) \sin(\theta)$$

$$= 2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + \sin(\theta) - 2 \sin^3(\theta)$$

$$= 2 \sin(\theta) (1 - \sin^2(\theta)) + \sin(\theta) - 2 \sin^3(\theta)$$

$$= 2 \sin(\theta) - 2 \sin^3(\theta) + \sin(\theta) - 2 \sin^3(\theta)$$

$$= 3 \sin(\theta) - 4 \sin^3(\theta)$$

Question 18

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sqrt{\frac{1 - \cos\left(2\frac{\pi}{12}\right)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2 - \sqrt{3}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2} \end{aligned}$$