1. Logarithmes

Définition. Le **logarithme** en base b d'un nombre est l'exposant E devant être mis à b pour obtenir une puissance P donnée :

$$\log_b(P) = E \iff b^E = P.$$

La base b est toujours un nombre positif : $b > 0$.

Exemple 1.

$$\log_2(8) = 3 \text{ car } 2^3 = 8$$

$$\log_5(25) = 2 \text{ car } 5^2 = 25$$

$$\log_3(81) = 4 \text{ car } 3^4 = 81$$

$$\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = -1 \text{ car } 2^{-1} = \frac{1}{2}$$

$$\log_3\left(\frac{1}{\sqrt{27}}\right) = -\frac{3}{2} \text{ car } 3^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}$$

Question 1
Vérifier les égalités suivantes à l'aide de la définition de logarithme.

a) $\log_{10}(100) = 2$
b) $\log_3(9) = 2$
c) $\log_{10}\left(\frac{1}{100}\right) = -2$
d) $\log_5\left(\sqrt{5}\right) = \frac{1}{2}$

Question 2
Évaluer les logarithmes suivants.

a) $\log_{10}(10000)$ b) $\log_3(27)$ c) $\log_{10}\left(\frac{1}{10}\right)$ d) $\log_5\left(\sqrt[3]{5}\right)$

1.1. Notations

Définition. Si la base est ommise, la base est 10 :

$$\log(P) \stackrel{\text{def}}{=} \log_{10}(P).$$

Définition. La notation ln est le logarithme à base e :

$$\ln(P) \stackrel{\text{def}}{=} \log_{\mathrm{e}}(P).$$

Le nombre $\mathrm{e} \approx 2.71$ est une constante mathématique importante. Cette base particulière donne des propriétés à aux fonctions $\ln(x)$ et e^x qui leur font jouer un rôle important en science.

Enfin, une convention souvent utiliser est d'omettre les parenthèse quand cela ne pose pas de problème. On écrit par exemple $\log_2 8$, sans parenthèses, au lieu de $\log_2(8)$.

Question 3
Évaluer les logarithmes suivants.

a) $\ln(1)$ b) $\ln\left(\mathrm{e}^2\right)$ c) $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^3}\right)$ d) $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$

2. Propriétés des logarithmes

2.1. Logarithme de l'unité

Proposition 1. Le logarithme de l'unité est zéro pour n'importe quelle base b :

$$\log_b(1) = 0.$$

Pourquoi ? Parce que $b^0 = 1$

2.2. Logarithmes et puissances de même base

Proposition 2.

$$\log_b\left(b^E\right) = E \qquad b^{\log_b(P)} = P$$

Exemple 2.

$$\begin{array}{ll} \log_2\left(2^7\right) = 7 & \text{car } 2^7 = 2^7 \\ 2^{\log_2(3)} = 3 & \text{car } \log_2(3) = \log_2(3) \\ \log_5\left(5^{\frac{1}{2}}\right) = \dfrac{1}{2} & \text{car } 5^{1/2} = 5^{1/2} \\ 5^{\log_5(\pi)} = \pi & \text{car } \log_5(\pi) = \log_5(\pi) \end{array}$$

Question 4
Simplifier les expressions suivantes.

a) $\log_{10}(10^\pi)$ b) $\log_3\left(3^{\sqrt{2}}\right)$ c) $10^{\log_{10}(2)}$ d) $2^{\log_2\left(\sqrt{2}\right)}$

2.3. Logarithme d'un produit

Proposition 3. Les logarithmes transforment les produits en sommes.

$$\log_b(P \cdot Q) = \log_b(P) + \log_b(Q)$$

Exemple 3.

$$\log_2(8 \cdot 16) = \log_2(8) + \log_2(16) = 3 + 4 = 7$$

$$\log_2\left(2\sqrt{2}\right) = \log_2(2) + \log_2\left(\sqrt{2}\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

Question 5
Simplifier les expressions suivantes à l'aide de la dernière propriété des logarithmes.

a) $\log_{10}\left(100\sqrt{10}\right)$

b) $\log_{10}\left(\sqrt{10}\sqrt[3]{10}\right)$

c) $\log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$

d) $\ln\left(2e^3\right)$

Exemple 4. Les logarithmes ont été initialement créés comme outils de calcul. Comme il est plus simple de calculer une somme que de calculer un produit, on utilisait les logarithmes et les puissances pour transformer le calcul de produits en calcul de sommes. Les valeurs des logarithmes étaient calculés à l'avance et consignée dans des tables de valeurs ou pouvaient être trouvée à l'aide de règles à calcul, donc sans utiliser de calculatrice.

Si par exemple $A = 2.2354$ et $B = 5.3987$ et que l'on veut calculer le produit AB, on peut transformer le produit en somme :

$$\log_{10}(AB) = \log_{10}(A) + \log_{10}(B) = \log_{10}(2.2354) + \log_{10}(5.3987)$$

On peut trouver les valeurs approximative des deux logarithmes dans des tables de logarithmes ou à l'aide de règles à calcul.

$$\log_{10}(2.2354) \approx 0.349355$$
$$\log_{10}(5.3987) \approx 0.732289$$

Le logarithme du produit est la somme des deux logarithmes

$$\begin{aligned}\log_{10}(AB) &= \log_{10}(2.2354) + \log_{10}(5.3987)\\ &\approx 0.349355 + 0.732289\\ &= 1.081644\end{aligned}$$

On trouve enfin le produit à l'aide de la définition de logarithme :

$$\log_{10}(AB) \approx 1.081644, \text{ et donc } 10^{1.081644} \approx AB.$$

La puissance peut elle aussi être calculée à l'aide de table ou de règle à calcul :

$$AB = 10^{1.081644} \approx 12.068242.$$

À titre comparatif, en calculant le produit directement, on trouve

$$AB = 2.2354 \times 5.3987 = 12.06825398.$$

Cette valeur est exacte, mais demande beaucoup plus de calculs ! Essayez de calculer ce produit sans calculatrice et comparer avec le temps nécessaire pour calculer sans calculatrice la somme $0.349355 + 0.732289$!

Question 6
Calculer le produit 3.51398×8.32459 à l'aide de logarithmes en transformant le produit en somme. Ne pas utiliser de calculatrice, vous pouvez utiliser les valeurs utiles parmi les valeurs suivantes :

$$\log_{10}(1.523413) \approx 0.182817$$
$$\log_{10}(3.51398) \approx 0.545799$$
$$\log_{10}(8.32459) \approx 0.920363$$
$$\log_{10}(11.83857) \approx 1.073299$$
$$\log_{10}(29.2524427682) \approx 1.466162$$
$$\log_{10}(29.2524334507365) = 1.466162$$

Question 7
Le tableau suivant donne des valeurs exactes ou approximatives du logarithme à base 10.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log_{10}(n)$	0	0.301	0.477	A	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	B

Utiliser ce tableau pour donner des réponses approximatives aux questions suivantes.

a) Quelle est la valeur de $A = \log_{10}(4)$?

b) Quelle est la valeur de B ?

c) Donner la valeur approximative de $\log_{10}(30)$.

2.4. Logarithme d'une puissance

Proposition 4. Le logarithme d'une puissance est le produit de son exposant par le logarithme de sa base :

$$\log_b\left(B^E\right) = E\log_b(B)$$

Exemple 5.

$$\log_{10}\left(2^5\right) = 5\log_{10}(2)$$

$$\log_3\left(2^{-5}\right) = -5\log_3(2)$$

$$\log_2\left(\sqrt{5}\right) = \log_2\left(5^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\log_2(5)$$

Question 8
Exprimer les logarithmes suivants sans utiliser de puissances.

a) $\log_{10}\left(5^{1000}\right)$ b) $\log_2\left(\mathrm{e}^{45}\right)$ c) $\log_3\left(12^{22}\right)$ d) $\ln\left(10^5\right)$

Exemple 6. On peut utiliser la dernière propriété des logarithmes pour trouver de nouvelles approximations de certains valeurs à partir d'approximations connues. Par exemple, si on sait que $\log_{10}(2) \approx 0.301030$, on peut approximer $\log_{10}(4)$:

$$\begin{aligned}\log_{10}(4) &= \log_{10}(2^2)\\ &= 2\log_{10}(2)\\ &\approx 2(0.301030)\\ &\approx 0.60206\end{aligned}$$

Question 9
Sachant que $\log_2(3) \approx 1.58496$, trouver une approximation des valeurs suivantes.

a) $\log_2(9)$ b) $\log_2\left(\frac{1}{3}\right)$ c) $\log_2\left(\sqrt{3}\right)$

2.5. Changement de base

Proposition 5. On peut calculer un logarithme en base b à l'aide de logarithmes en base c de la manière suivante :

$$\log_b(A) = \frac{\log_c(A)}{\log_c(b)}$$

Exemple 7. Exprimons les logarithmes suivants en base 10 :

$$\log_2(3) = \frac{\log_{10}(3)}{\log_{10}(2)}$$

$$\log_5(2) = \frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(5)}$$

$$\log_7(5) = \frac{\log_{10}(5)}{\log_{10}(7)}$$

Question 10
Transformer les expressions suivantes pour les exprimer à l'aide de logarithmes dans la base donnée. Simplifier le résultat si cela est possible.

a) $\log_2(10)$ en base 10
b) $\log_3(9)$ en base 10
c) $\log_{10}(2)$ en base 5
d) $\log_{10}(9)$ en base 3
e) $\ln(2)$ en base 10
f) $\log_{10}(5)$ en base e

Résumé propriétés des logarithmes

(L1) $\log_b(b^A) = A$
(L2) $b^{\log_b(A)} = A$
(L3) $\log_b(AB) = \log_b(A) + \log_b(B)$
(L4) $\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b(A) - \log_b(B)$
(L5) $\log_b(A^B) = B\log_b(A)$
(L6) $\log_b(A) = \frac{\log_c(A)}{\log_c(b)}$

Exercices supplémentaires

Question 11
Utiliser la définition de logarithme pour vérifier les égalités suivantes.

a) $\log_2(8) = 3$
b) $\log_3(81) = 4$
c) $\log_2\left(\dfrac{1}{4}\right) = -2$
d) $\log_5\left(\dfrac{1}{5}\right) = -1$
e) $\log_{10}\left(\sqrt{10}\right) = \dfrac{1}{2}$
f) $\log_{10}(100000) = 5$
g) $\log_{10}(0{,}00001) = -5$

Question 12
Transformer les logarithmes suivant sous forme forme exponentielle et déterminer la valeur de x.

a) $\log_3(9) = x$
b) $\log_3(81) = x$
c) $\log_2(16) = x$
d) $\log_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = x$
e) $\log_5\left(\dfrac{1}{25}\right) = x$
f) $\log_{10}(1000) = x$
g) $\log_5\left(\sqrt[5]{5}\right) = x$
h) $\log_{10}(100000) = x$
i) $\log_{10}\left(10^{1000}\right) = x$
j) $\log_{10}(1/1000) = x$
k) $\log_{10}(0{,}000001) = x$
l) $\log_7\left(\sqrt[3]{7}\right) = x$
m) $\log_{10}(0{,}001) = x$

Question 13
Exprimer les logarithmes suivants à l'aide de logarithmes dans la base donnée et simplifier si possible.

a) $\log_2(5)$ en base 10.
b) $\log(2)$ en base 2.
c) $\log_2\left(\dfrac{1}{25}\right)$ en base 5.
d) $\log_3\left(\sqrt{2}\right)$ en base 2.
e) $\log_{\sqrt{5}}(5)$ en base 5.

Question 14
Simplifier les expressions suivantes. Exprimer tout les résultats à l'aide de logarithme à base 10 si nécessaire.

a) $\log_5(18)$
b) $\log_2(10)$
c) $\log_2\left(10^{1000}\right)$
d) $\log_{10}(100000 \times 100000)$
e) $\log_{10}\left(1000000^9\right)$
f) $\log_{10}(100000) - \log_{10}(10000)$
g) $\log_{10}\left(10^{12345}100^{22}\right)$
h) $\log_2\left(10^4\right)$
i) $\log_{25}(5)$
j) $\log_9(27)$
k) $\log_{10}\left(\sqrt{3}\right)$
l) $2\log_2\left(\sqrt{8}\right)$
m) $5\log_5\left(\sqrt[5]{5}\right)$
n) $2\log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{100}}\right)$
o) $2\log_{10}\left(\dfrac{1}{\sqrt{100}}\right) + \log_{10}(100)$
p) $\log_2\left(\dfrac{2}{\sqrt{8}}\right)$
q) $\log_5\left(\dfrac{25}{125}\right)$

Question 15
On connait les propriétés suivantes des logarithmes.

(L1) $\log_b(b^A) = A$
(L2) $b^{\log_b(A)} = A$
(L3) $\log_b(AB) = \log_b(A) + \log_b(B)$
(L4) $\log_b(A^B) = B\log_b(A)$
(L5) $\log_b(A) = \dfrac{\log_c(A)}{\log_c(b)}$

Utiliser ces propriétés pour expliquer pourquoi les propriétés suivantes sont vraies. Dire quand vous utiliser une des cinq propriétés connues.

a) $\log_b(\dfrac{1}{A}) = -\log_b(A)$
b) $\log_b\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_b(A) - \log_b(B)$

Question 16

a) Déterminer la valeur du produit $2{,}34 \times 3{,}12$ à l'aide de l'algorithme usuel de multiplication. Combien d'opération (addition ou multiplication) faut-il effectuer pour faire cette multiplication ?

b) Sachant que $\log(2{,}34) \approx 0{,}36921$ et $\log(3{,}12) \approx 0{,}49415$ et $\log(7.3008) \approx 0{,}86336$, déterminer la valeur du produit $2{,}34 \times 3{,}12$. Combien d'opérations faut-il effectuer pour faire la multiplication de cette manière ?

Question 17
Évaluer les nombres suivants à l'aide des propriétés des logarithmes et de la table donnée.

x	$\log_{10}(x)$
1	0.000
2	0.301
3	0.477
4	0.602
5	0.699
6	0.778
7	0.845
8	0.903
9	0.954
10	1.000

a) $\log_{10}(12)$ b) $\log_{10}(15)$ c) $\log_{10}(200)$ d) $\log_{10}(140)$

Question 18
Réécrire les égalités suivantes à l'aide d'un logarithme.

a) $5^3 = 125$
b) $2^{10} = 1024$
c) $10^{-2} = \dfrac{1}{100}$
d) $2^{-8} = \dfrac{1}{256}$
e) $\sqrt{9} = 3$
f) $\sqrt{81} = 9$
g) $\sqrt[3]{27} = 3$
h) $7^{-4} = \dfrac{1}{2401}$

Question 19
Réécrire les égalités suivantes à l'aide d'un exposant.

a) $\log_7(49) = 2$
b) $\log_2(128) = 7$
c) $\log_2\left(\dfrac{1}{64}\right) = -6$
d) $\log_8(2) = \dfrac{1}{3}$
e) $\log_3\left(\sqrt{3}\right) = \dfrac{1}{2}$
f) $\log_{10}\left(\sqrt[3]{100}\right) = \dfrac{2}{3}$
g) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\dfrac{1}{4}\right) = 2$
h) $\log_{1/5}(625) = -4$

Question 20
Écrire les expressions suivantes à l'aide d'un seul logarithme.

a) $\log_2(3) + \log_2(5)$
b) $\log_2(25) - \log_2(3)$
c) $\log_{10}(25) - \log_{10}(3)$
d) $\log_3(2) \cdot \log_2(11)$
e) $\dfrac{\log(5)}{\log(2)}$
f) $\log_2\left(2^{\log_3(4)}\right)$

Question 21
Évaluer, sans calculatrice.

a) $\log_2(64)$
b) $\log_2\left(\dfrac{1}{8}\right)$
c) $\log_2(2048)$
d) $\log_2(1)$
e) $\log(1000)$
f) $\log(0.000001)$

Question 22
Évaluer les expressions suivantes.

a) $\log_2\left(2^7\right)$
b) $\log_2\left(2^{11} \cdot 2^5\right)$
c) $\log_2(256 \cdot 128)$
d) $\log_3\left(\dfrac{9}{81}\right)$
e) $2^{\log_2(11)}$
f) $\log_2(5) \cdot \log_5(128)$
g) $\dfrac{\log_7(32)}{\log_7(2)}$

Question 23
Évaluer les expressions suivantes.

a) $\log_{10}(0.00001)$
b) $\log_8(2)$
c) $\log_2(1)$
d) $\log_2\left(2^9\right)$
e) $\log_3\left(3^5 \cdot 9^3\right)$
f) $\log_2\left(\dfrac{1024}{128}\right)$
g) $5^{\log_5(14)}$
h) $\log_2(3) \cdot \log_3(512)$
i) $\dfrac{\log_5(81)}{\log_5(3)}$
j) $\log_{16}(64)$

Question 24
Évaluer les nombres suivants sachant que $\log_3(2) \approx 0.63$.

a) $\log_{10}(1000)$
b) $\log_{100}(10)$
c) $\log_3\left(\dfrac{1}{9}\right)$
d) $\log_3 54$

Solutions

Question 1

a) $10^2 = 100$

b) $3^2 = 9$

c) $10^{-2} = \frac{1}{100}$

d) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

Question 2

a) 4 car $10^4 = 10000$

b) 3 car $3^3 = 27$

c) -1 car $10^{-1} = \frac{1}{10}$

d) $\frac{1}{3}$ car $5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$

Question 3

a) 0

b) 2

c) -3

d) $\frac{1}{2}$

Question 4

a) π

b) $\sqrt{2}$

c) 2

d) $\sqrt{2}$

Question 5

a) $\log_{10}\left(100\sqrt{10}\right)$
$$\begin{aligned} &= \log_{10}(100) + \log_{10}\left(\sqrt{10}\right) \\ &= 2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

b) $\log_{10}\left(\sqrt{10}\,\sqrt[3]{10}\right)$
$$\begin{aligned} &= \log_{10}\left(\sqrt{10}\right) + \log_{10}\left(\sqrt[3]{10}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

c) $\log_2\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)$
$$\begin{aligned} &= \log_2\left(\sqrt{2}\right) + \log_2\left(\frac{1}{8}\right) \\ &= \frac{1}{2} + -3 \\ &= \frac{-5}{2} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \ln\left(2e^3\right) &= \ln(2) + \ln\left(e^3\right) \\ &= \ln(2) + 3 \\ &= 3 + \ln(2) \end{aligned}$$

Question 6

$$\begin{aligned} &\log_{10}(3.51398 \times 8.32459) \\ &\quad = \log_{10}(3.51398) + \log_{10}(8.32459) \\ &\quad = 0.545799 + 0.920363 \\ &\quad = 1.466162 \end{aligned}$$

On a donc que

$\log_{10}(3.51398 \times 8.32459) = 1.466162.$

Dans les valeurs données, on voit que

$\log_{10}(29.2524334507365) = 1.466162,$

et le produit est donc

$$\begin{aligned} 10^{1.466162} &\approx 29.2524334507365 \\ &\approx 29.252433. \end{aligned}$$

Question 7

a) $$\begin{aligned} \log_{10}(4) &= \log_{10}(2\cdot 2) \\ &= \log_{10}(2) + \log_{10}(2) \\ &\approx 0.301 + 0.301 \\ &\approx .0602 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \log_{10}(10) &= \log_{10}(2\cdot 5) \\ &= \log_{10}(2) + \log_{10}(5) \\ &\approx 0.301 + 0.699 \\ &= 1 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \log_{10}(30) &= \log_{10}(3\cdot 10) \\ &= \log_{10}(3) + \log_{10}(10) \\ &\approx 0.477 + 1 \\ &= 1.477 \end{aligned}$$

Question 8

a) $1000\log_{10}(5)$

b) $45\log_2(e)$

c) $22\log_3(12)$

d) $5\ln(10)$

Question 9

a) $$\begin{aligned} \log_2(9) &= \log_2\left(3^2\right) \\ &= 2\log_2(3) \\ &\approx 2(1.58496) \\ &= 3.16992 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} \log_2\left(\frac{1}{3}\right) &= \log_2\left(3^{-1}\right) \\ &= (-1)\log_2(3) \\ &\approx (-1)(1.58496) \\ &= -1.58496 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} \log_2\left(\sqrt{3}\right) &= \log_2\left(3^{1/2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\log_2(3) \\ &\approx \frac{1}{2}(1.58496) \\ &= 0.79248 \end{aligned}$$

Question 10

a) $\frac{\log_{10}(10)}{\log_{10}(2)} = \frac{1}{\log_{10}(2)}$

b) $\frac{\log_{10}(9)}{\log_{10}(3)}$

c) $\frac{\log_5(2)}{\log_5(10)}$

d) $\frac{\log_3(9)}{\log_3(10)} = \frac{2}{\log_3(10)}$

e) $\frac{\log_{10}(2)}{\log_{10}(e)}$

f) $\frac{\ln(5)}{\ln(10)}$

Question 11

a) $2^3 = 8$

b) $3^4 = 81$

c) $2^{-2} = \frac{1}{4}$

d) $5^{-1} = 1/5$

e) $10^{1/2} = \sqrt{10}$

f) $10^5 = 100000$

g) $10^{-5} = 0{,}00001$

Question 12

a) $3^x = 9$, donc $x = 2$

b) $3^x = 81$, donc $x = 4$

c) $2^x = 16$, donc $x = 4$

d) $2^x = \frac{1}{2}$, donc $x = -1$

e) $5^x = 1/25 = 1/5^2$, donc $x = -2$

f) $10^x = 1000$, donc $x = 3$

g) $5^x = \sqrt[5]{5} = 5^{1/5}$, donc $x = 1/5$

h) $10^x = 100000$, donc $x = 5$

i) $x = 1000$

j) $x = -3$

k) $10^x = 0{,}000001$, donc $x = -6$

l) $7^x = \sqrt[3]{7} = 7^{1/3}$, donc $x = 1/3$

m) $10^x = 0{,}001 = \frac{1}{1000} = 10^{-3}$, donc $x = -3$

Question 13

a) $\log_2(5) = \frac{\log(5)}{\log(2)}$

b) $\log(2) = \frac{\log_2(2)}{\log_2(10)} = \frac{1}{\log_2(10)}$

c) $$\begin{aligned} \log_2(5) &= \frac{\log_5(1/25)}{\log_5(2)} \\ &= \frac{-2}{\log_5(2)} \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} \log_3\left(\sqrt{2}\right) &= \frac{\log_2(\sqrt{2})}{\log_2(3)} \\ &= \frac{1/2}{\log_2(3)} \\ &= \frac{1}{2\log_2(3)} \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} \log_{\sqrt{5}}(5) &= \frac{\log_5(5)}{\log_5\left(\sqrt{5}\right)} \\ &= \frac{1}{1/2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Question 14

a) $\frac{\log(18)}{\log(5)}$

b) $\frac{\log(10)}{\log(2)} = \frac{1}{\log(2)}$

c) $\frac{1000}{\log(2)}$

d) 10

e) 54

f) 1

g) 12389

h) $\frac{4}{\log(2)}$

i) $\frac{1}{2}$

j) $\frac{3}{2}$

k) $\frac{\log(3)}{2}$

l) 3

m) 1

n) -2

o) 0

p) $-\frac{1}{2}$

q) -1

Question 15

a) $$\begin{aligned} \log_b\left(\frac{1}{A}\right) &= \log_b\left(A^{-1}\right) \\ &= -\log_b(A) \end{aligned}$$
On utilise la propriété PL4 à la dernière égalité.

b) $$\begin{aligned} \log_b\left(\frac{A}{B}\right) &= \log_b\left(A\frac{1}{B}\right) \\ &= \log_b(A) + \log_b\left(\frac{1}{B}\right) \\ &= \log_b(A) + \log_b\left(B^{-1}\right) \\ &= \log_b(A) - \log_b(B) \end{aligned}$$
On utilise les propriétés PL3 à la 2e égalité et PL4 à la 3e égalité.

Question 16

a) Le produit est 7,3008 Il faut 9 multiplications et 7 additions, donc 16 opérations pour effectuer le produit.

b) Soit $P = 2{,}34 \times 3.12$ le produit cherché. En prenant le logarithme, on a que
$$\begin{aligned} &\log(P) \\ &\quad = \log(2{,}34 \times 3.12) \\ &\quad = \log(2{,}34) + \log(3.12) \\ &\quad \approx 0{,}36921 + 0{,}49415 \\ &\quad \approx 0{,}86336 \end{aligned}$$

Comme $\log(P) \approx 0{,}86336$ implique que $P \approx 10^{0{,}86336}$ et que $\log(7.3008) \approx 0{,}86336$ est équivalent à $7{,}3008 = 10^{0{,}86336}$, on doit avoir que $P \approx 7{,}3008$.

Il faut 7 additions pour faire ce calcul (et avoir une table de logarithmes sous la main !)

Question 17

a) 1.079

b) 1.176

c) 2.301

d) 2.146

Question 18

a) $\log_5 125 = 3$
b) $\log_2 1024 = 10$
c) $\log_{10} \frac{1}{100} = -2$
d) $\log_2 \frac{1}{256} = -8$
e) $\log_9 3 = \frac{1}{2}$
f) $\log_{81} 9 = \frac{1}{2}$
g) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$
h) $\log_7 \frac{1}{2401} = -4$

Question 19

a) $7^2 = 49$
b) $2^7 = 128$
c) $2^{-6} = \frac{1}{64}$
d) $8^{\frac{1}{3}} = 2$
e) $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$
f) $10^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{100}$
g) $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$
h) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-4} = 625$

Question 20

a) $\log_2(15)$
b) $\log_2\left(\frac{25}{3}\right)$
c) $\log_{10}\left(\frac{25}{3}\right)$
d) $\log_3(11)$
e) $\log_2(5)$
f) $\log_3(4)$

Question 21

a) 6
b) -3
c) 11
d) 0
e) 3
f) -6

Question 22

a) 7
b) 16
c) 15
d) -2
e) 11
f) 7
g) 5

Question 23

a) -5
b) $\frac{1}{3}$
c) 0
d) 9
e) 11
f) 7
g) 14
h) 9
i) 4
j) $\frac{3}{2}$

Question 24

a) 3
b) $\frac{1}{2}$
c) -2
d) 3.63