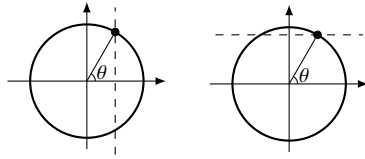


Équations trigonométriques

1. Résolution d'équations trigonométriques

1.1. Équations comportant une des fonctions sinus ou cosinus



Question 1

Résoudre les équations trigonométriques suivantes. Donner toutes les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ et les représenter dans le cercle trigonométrique.

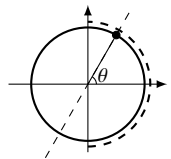
a) $\sin(\theta) = 1$

c) $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$

b) $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$

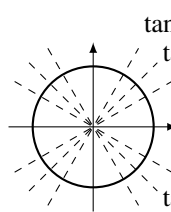
d) $\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

1.2. Équations comportant la fonction tangente



$$\tan(\theta) = m \iff \theta = \arctan(m)$$

$$\arctan(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$$



$$\tan(\pi/3) = \sqrt{3}$$

$$\tan(\pi/4) = 1$$

$$\tan(\pi/6) = 1/\sqrt{3}$$

$$\tan(0) = 0$$

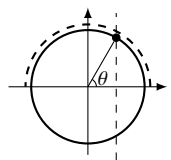
$$\tan(-\pi/6) = -1/\sqrt{3}$$

$$\tan(-\pi/4) = -1$$

$$\tan(-\pi/3) = -\sqrt{3}$$

2. Fonctions trigonométriques inverses

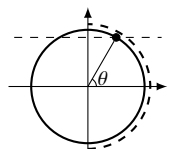
2.1. Arccosinus et arcsinus



$$\cos(\theta) = x \iff \theta = \arccos(x)$$

Valeur principale :

$$\arccos(x) \in [0, \pi]$$



$$\sin(\theta) = y \iff \theta = \arcsin(y)$$

Valeur principale :

$$\arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Question 2

Évaluer les fonctions trigonométriques inverses suivantes.

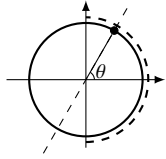
a) $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$

c) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

2.2. Arctangente



$$\tan(\theta) = y \iff \theta = \arctan(y)$$

Valeur principale :

$$\arctan(x) \in]-\pi/2, \pi/2[$$

Question 3

Évaluer les fonctions trigonométriques inverses suivantes.

a) $\arctan(0)$

c) $\arctan(\sqrt{3})$

b) $\arctan(-1)$

d) $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

3. Équations générales comportant des fonctions trigonométriques

Pour résoudre une équation comportant des fonctions trigonométriques qui n'est pas d'une des formes étudiées dans les sessions précédentes, on manipule algébriquement l'équation pour la ramener à une des formes $\cos(\theta) = X$, $\sin(\theta) = Y$ ou $\tan(\theta) = P$ pour ensuite la résoudre.

Exemple 1. Résoudre l'équation $\sin(x) + \cos(x) = 0$. Donner uniquement la solution principale.

$$\begin{aligned}\sin(x) + \cos(x) &= 0 \\ \sin(x) &= -\cos(x) \\ \frac{\sin(x)}{\cos(x)} &= -1 \\ \tan(x) &= -1\end{aligned}$$

On a donc que

$$x = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Exemple 2. Résoudre l'équation $2 \sec(x) = 4$. Donner uniquement la solution principale.

$$\begin{aligned}2 \sec(x) &= 4 \\ \sec(x) &= 2 \\ \frac{1}{\cos(x)} &= 2 \\ \cos(x) &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

On a donc que

$$x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

Exemple 3. Résoudre l'équation $9 \sin^2(x) - 2 = 0$. Donner uniquement la solution principale.

$$3 \sin^2(x) - 4 = 0$$

$$\sin^2(x) = \frac{3}{4}$$

$$\sin(x) = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\sin(x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a donc que

$$x = \arcsin\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm \frac{\pi}{3}.$$

Exemple 4. Résoudre l'équation $9 \sin^2(x) - 2 = 0$. Donner uniquement la solution principale.

$$2 \cos(3x) = \sqrt{2}$$

$$\cos(3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc que

$$3x = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

et enfin que

$$x = \frac{\pi/4}{3} = \frac{\pi}{12}.$$

Question 4

Résoudre les équations suivantes. Donner uniquement la solution principale.

a) $\sin(x) - \cos(x) = 0$

c) $4 \sin^2(x) - 1 = 0$

b) $4 \sec(x) = 8$

d) $2 \cos(4x) = \sqrt{3}$

Exercices supplémentaires

Question 5

Résoudre les équations trigonométriques suivantes. Décrire toutes les solutions dans l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a) $\sin(\theta) = -1$

b) $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$

c) $\cos(\theta) = 1$

d) $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\sin(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

g) $\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$

Question 8

Résoudre les équations suivantes en donnant uniquement la solution principale.

a) $2 \sin(\theta) = 1$

b) $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $3 \sin(\theta) = \sqrt{3}$

d) $2 \cos(\theta) + 1 = 0$

e) $\tan(\theta) - 1 = 0$

f) $\sin(\theta) = -\frac{1}{2}$

g) $4 \cos(\theta) = 2$

h) $\sqrt{3} \tan(\theta) = -1$

Question 6

Évaluer les fonctions trigonométriques inverses suivantes.

a) $\arctan(0)$

b) $\arctan(-1)$

c) $\arctan(\sqrt{3})$

d) $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Question 7

Évaluer les fonctions trigonométriques inverses suivantes.

a) $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

b) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e) $\arctan(1)$

f) $\arctan(-\sqrt{3})$

g) $\arcsin(0)$

h) $\arccos(0)$

i) $\arccos(1)$

j) $\arcsin(-1)$

k) $\arccos(0)$

l) $\arctan(0)$

m) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

n) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

o) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

p) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

q) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$

r) $\arctan(-1)$

s) $\arctan(\sqrt{3})$

Question 9

Résoudre les équations suivantes. Donner uniquement la solution principale.

a) $2 \sin(x) + 1 = 0$

b) $\sqrt{3} \tan(x) - 1 = 0$

c) $3 \csc(x) - 6 = 0$

d) $4 \cos^2(x) - 3 = 0$

e) $5 \sec(x) + 10 = 0$

f) $2 \cos(2x) - \sqrt{2} = 0$

g) $\tan^2(x) - 3 = 0$

h) $4 \sin(3x) + 2\sqrt{3} = 0$

i) $2 \cot(x) + 2 = 0$

j) $8 \sin^2(x) - 2 = 0$

k) $3 \sec(2x) - 3\sqrt{2} = 0$

l) $\sin(x) \cos(x) + \cos(x) = 0$

m) $3 \tan(x) + \sqrt{3} = 0$

n) $6 \csc(x) + 4\sqrt{3} = 0$

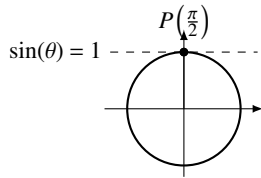
o) $4 \cos^2(2x) - 2 = 0$

p) $\cos(x) \tan(x) - \cos(x) = 0$

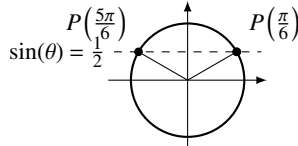
Solutions

Question 1

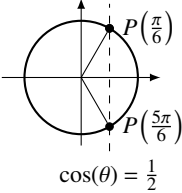
a) $\theta = \frac{\pi}{2}$



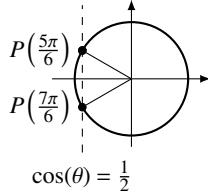
b) $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$



c) $\theta = \frac{\pi}{3}$ ou $\frac{2\pi}{3}$



d) $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$



Question 2

- a) $\frac{\pi}{6}$ c) $-\frac{\pi}{6}$
 b) $\frac{\pi}{3}$ d) $\frac{2\pi}{3}$

Question 3

- a) 0 c) $\frac{\pi}{3}$
 b) $-\frac{\pi}{4}$ d) $-\frac{\pi}{6}$

Question 4

a) $\sin(x) - \cos(x) = 0$
 $\sin(x) = \cos(x)$
 $\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = 1$
 $\tan(x) = 1$
 On a donc que
 $x = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$.

b) $4 \sec(x) = 8$

$\sec(x) = 2$
 $\frac{1}{\cos(x)} = 2$
 $\cos(x) = \frac{1}{2}$
 On a donc que
 $x = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$.

c) $4 \sin^2(x) - 1 = 0$

$\sin^2(x) = \frac{1}{4}$
 $\sin(x) = \pm \frac{1}{2}$
 On a donc que

$x = \arcsin\left(\pm \frac{1}{2}\right) = \pm \frac{\pi}{6}$.

$2 \cos(4x) = \sqrt{3}$

d) $\cos(4x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 On a donc que
 $4x = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$,
 et enfin
 $x = \frac{\pi}{24}$.

Question 5

- a) $\theta = \frac{3\pi}{2}$
 b) $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{5\pi}{6}$
 c) $\theta = 0$
 d) $\theta = \frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$
 e) $\theta = \frac{\pi}{6}$ ou $\frac{11\pi}{6}$
 f) $\theta = \frac{4\pi}{3}$ ou $\frac{5\pi}{3}$
 g) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{4\pi}{3}$

Question 6

- a) 0
 b) $-\frac{\pi}{4}$
 c) $\frac{\pi}{3}$
 d) $-\frac{\pi}{6}$

Question 7

- a) $\frac{\pi}{4}$ k) $\frac{\pi}{2}$
 b) $-\frac{\pi}{6}$ l) 0
 c) $\frac{\pi}{3}$ m) $\frac{\pi}{4}$
 d) $\frac{5\pi}{6}$ n) $-\frac{\pi}{3}$
 e) $\frac{\pi}{4}$ o) $\frac{5\pi}{2}$
 f) $-\frac{\pi}{3}$ p) $-\frac{\pi}{4}$
 g) 0 q) $\frac{2\pi}{3}$
 h) $\frac{\pi}{2}$ r) $-\frac{\pi}{4}$
 i) 0 s) $\frac{\pi}{3}$
 j) $-\frac{\pi}{2}$

Question 8

- a) $\theta = \frac{\pi}{6}$ e) $\theta = \frac{\pi}{4}$
 b) $\theta = \frac{\pi}{6}$ f) $\theta = -\frac{\pi}{6}$
 c) $\theta = \frac{\pi}{3}$ g) $\theta = 0$
 d) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ h) $\theta = -\frac{\pi}{6}$

Question 9

- a) $2 \sin(x) + 1 = 0$
 $\sin(x) = -\frac{1}{2}$
 On a donc que
 $x = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$.
 b) $\sqrt{3} \tan(x) - 1 = 0$
 $\tan(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 On a donc que
 $x = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.

- c) $3 \csc(x) - 6 = 0$]
 $\csc(x) = 2$
 $\frac{1}{\sin(x)} = 2$
 $\sin(x) = \frac{1}{2}$
 On a donc que
 $x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.

- d) $4 \cos^2(x) - 3 = 0$
 $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$
 $\cos(x) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$
 On a donc que
 $x = \arccos\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \pm \frac{\pi}{6}$.
 e) $5 \sec(x) + 10 = 0$
 $\sec(x) = -2$
 $\frac{1}{\cos(x)} = -2$
 $\cos(x) = -\frac{1}{2}$
 On a donc que
 $x = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$.

- f) $2 \cos(2x) - \sqrt{2} = 0$
 $\cos(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
 On a donc que
 $2x = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$,
 et enfin
 $x = \frac{\pi}{8}$.

- g) $\tan^2(x) - 3 = 0$
 $\tan^2(x) = 3$
 $\tan(x) = \pm \sqrt{3}$
 On a donc que $x = \arctan(\pm \sqrt{3}) = \pm \frac{\pi}{3}$.
 h) $4 \sin(3x) + 2\sqrt{3} = 0$
 $\sin(3x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 On a donc que
 $3x = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$,
 et enfin $x = -\frac{\pi}{9}$.

- i) $2 \cot(x) + 2 = 0$
 $\cot(x) = -1$
 $\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -1$
 $\cos(x) = -\sin(x)$
 $\tan(x) = -1$
 On a donc que
 $x = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

j) $8 \sin^2(x) - 2 = 0$

$$\sin^2(x) = \frac{1}{4}$$

$$\sin(x) = \pm \frac{1}{2}$$

On a donc que

$$x = \arcsin\left(\pm \frac{1}{2}\right) = \pm \frac{\pi}{6}.$$

k) $3 \sec(2x) - 3\sqrt{2} = 0$

$$\sec(2x) = \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\cos(2x)} = \sqrt{2}$$

$$\cos(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc que

$$2x = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4},$$

et enfin

$$x = \frac{\pi}{8}.$$

l) $\sin(x)\cos(x) + \cos(x) = 0$

$$\cos(x)(\sin(x) + 1) = 0$$

On a donc $\cos(x) = 0$ ou $\sin(x) = -1$, ce qui donne respectivement $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$.

La solution principale est

$$x = -\frac{\pi}{2}.$$

m) $3 \tan(x) + \sqrt{3} = 0$

$$\tan(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

On a donc que

$$x = \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

n) $6 \csc(x) + 4\sqrt{3} = 0$

$$\csc(x) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{1}{\sin(x)} = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin(x) = -\frac{3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

On a donc que

$$x = \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}.$$

o) $4 \cos^2(2x) - 2 = 0$

$$\cos^2(2x) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2x) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a donc que

$$2x = \arccos\left(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm \frac{\pi}{4},$$

et enfin $x = \pm \frac{\pi}{8}$.

p) $\cos(x)\tan(x) - \cos(x) = 0$

$$\cos(x)(\tan(x) - 1) = 0$$

On a donc $\cos(x) = 0$ ou $\tan(x) = 1$, ce qui donne respectivement $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{4}$. La solution principale est donc

$$x = \frac{\pi}{4}.$$