1. Fractions algébriques

Définition. Une **fraction algébrique** est un quotient où le numérateur et le dénominateurs sont des polynômes.

Exemple 1. Les expressions algébriques suivantes sont des fractions algébriques.

$$\frac{x^2+x+1}{x^3-4x+3} \qquad \frac{x^5+x^4-3x^2+x+2}{3x^4+4x^2+2x+3}$$
$$\frac{1}{x^2+1} \qquad \frac{x^3-1}{x}$$

Question 1
Lesquelles des expressions suivantes sont des fractions algébriques ?

a) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3-4x^2+3x+1}$

b) $\dfrac{x^2}{x^3+1}$

c) $\dfrac{1}{x}$

d) $\dfrac{x^3+x^{2/3}+\frac{3}{4}}{\frac{x^2}{5}+\frac{5}{3}}$

e) $\dfrac{x}{5}$

f) $\dfrac{3\sqrt{x}+x+1}{x^2+4}$

g) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

1.1. Simplification de fractions algébriques

Rappel. Comme les fractions numériques,on peut simplifier un facteur commun au numérateur et au dénominateur d'une fraction algébrique :

$$\frac{A\cancel{C}}{B\cancel{C}}=\frac{A}{B}$$

Exemple 2.

$$\frac{\cancel{(x-2)}(x+4)}{(x-1)\cancel{(x-2)}(x-4)}=\frac{x+4}{(x-1)(x-3)}$$

Exemple 3.

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4}{x^2-4x+4}&=\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x-2)^{\cancel{2}}}\\&=\frac{x+2}{x-2}\end{aligned}$$

Exemple 4.

$$\begin{aligned}\frac{2x^4-3x^3-2x^2}{x^3-x^2-2x}&=\frac{x^2\left(2x^2-3x-2\right)}{x(x^2-x-2)}\\&=\frac{x^2\left(2x^2-4x+x-2\right)}{x((x+1)(x-2))}\\&=\frac{x^2\left(2x(x-2)-2(x-2)\right)}{x(x+1)(x-2)}\\&=\frac{x^2\left((2x-2)(x-2)\right)}{x(x+1)(x-2)}\\&=\frac{2x^{\cancel{2}}(x-1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x}(x+1)\cancel{(x-2)}}\\&=\frac{2x(x-1)}{x+1}\end{aligned}$$

Note. On utilise parfois l'identité suivante :

$$-(A-B) = B-A.$$

Par exemple, on a que :

$$\begin{aligned} 3-x &= -(x-3), \\ -(x-2) &= -x+2. \end{aligned}$$

Question 2
Simplifier les fractions algébriques suivantes.

a) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$ b) $\dfrac{2x^3-7x^2+3x}{x^4-6x^3+9x^2}$

2. Opérations sur les fractions algébriques

Les opérations sur les fractions algébriques sont effectuées comme les opérations sur les quotients.

2.1. Produits de fractions algébriques

Rappel (Produit de quotients)**.**

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D} = \frac{AC}{BC}$$

Exemple 5.

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-2}\cdot\frac{x-3}{x+2} &= \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{x^2-x-2}{x^2-4} \end{aligned}$$

Exemple 6.

$$\begin{aligned} \frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}\cdot\frac{x^2+6x+9}{x^2-x-2} &= \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)(x+3)}\cdot\frac{(x+3)^2}{(x-2)(x+1)} \\ &= \frac{\cancel{(x+1)}\cancel{(x-2)}(x+3)^{\cancel{2}}}{\cancel{(x+3)}(x-2)^{\cancel{2}}\cancel{(x+1)}} \\ &= \frac{x+3}{x-2} \end{aligned}$$

Question 3
Multiplier et simplifier.

a) $\dfrac{4x^2-9}{x+1}\cdot\dfrac{x^2-1}{2x^2-5x+3}$ c) $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}\cdot\dfrac{x^2+2x-3}{x^2-4x+4}$

b) $\dfrac{x^3+x^2-6x}{2x^2+8x+8}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$ d) $\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-1}\cdot\dfrac{x^2+3x+2}{6x^2-x-1}$

2.2. Quotient de fractions algébriques

Rappel.

$$\frac{A/B}{C/D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C}$$

Exemple 7.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\dfrac{x-6}{x+1}\right)}{\left(\dfrac{x^2-36}{x^2+2x+1}\right)} &= \left(\frac{x-6}{x+1}\right)\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2-36}\right) \\
&= \left(\frac{x-6}{x+1}\right)\left(\frac{(x+1)^2}{(x-6)(x+6)}\right) \\
&= \frac{(x-6)(x+1)^2}{(x+1)(x-6)(x+6)} \\
&= \frac{x+1}{x+6}
\end{aligned}$$

Question 4
Diviser et simplifier.

a) $\dfrac{\left(\dfrac{9x^2-25}{x^2+6x+9}\right)}{\left(\dfrac{3x^2+2x-5}{x^2+2x-3}\right)}$

b) $\dfrac{\left(\dfrac{4x^2+4x^2+x}{x^2-2x-8}\right)}{\left(\dfrac{2x^3+x^2}{2x-1}\right)}$

2.3. Somme et différences de fractions algébriques

On additionne et on soustrait les fractions algébriques avec les propriétés usuelles des fractions.

Rappel. Si deux fractions (algébriques) ont le même dénominateur :

$$\frac{A}{C} + \frac{A}{C} = \frac{A+B}{C} \qquad \frac{A}{C} - \frac{A}{C} = \frac{A-B}{C}.$$

Si deux fractions (algébriques) ont des dénominateurs différent, on doit les transformer pour qu'elles aient un dénominateur commun.

$$\begin{aligned}
\frac{A}{C} + \frac{B}{D} &= \frac{AD}{CD} + \frac{BC}{CD} = \frac{AD+BC}{CD} \\
\frac{A}{C} - \frac{B}{D} &= \frac{AD}{CD} - \frac{BC}{CD} = \frac{AD-BC}{CD}
\end{aligned}$$

Bien qu'on puisse toujours prendre CD comme dénominateur commun, on peut aussi prendre un autre dénominateur commun comme le plus petit commun multiple de C et D.

Exemple 8.

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1} + \frac{x+2}{x-2} &= \frac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x-2)} + \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \\
&= \frac{(x+1)(x-2)+(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-2)} \\
&= \frac{x^2-x-2+x^2+x-2}{x^2-3x+2} \\
&= \frac{2x^2-4}{x^2-3x+2}
\end{aligned}$$

Exemple 9.

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x^2-4}+\frac{x+2}{(x^2-x-2)} &= \frac{x+1}{(x-2)(x+2)}+\frac{(x+2)}{(x+1)(x-2)}\\
&= \frac{(x+1)(x+1)}{(x+1)(x-2)(x+2)}+\frac{(x+2)(x+2)}{(x+1)(x-2)(x+2)}\\
&= \frac{(x+1)^2+(x+2)^2}{(x+1)(x-2)(x+2)}\\
&= \frac{(x^2+2x+1)+(x^2+4x+4)}{(x+1)(x^2-4)}\\
&= \frac{2x^2+6x+1)+(x^2+4x+4)}{(x+1)(x^2-4)}
\end{aligned}$$

Question 5
Additionner les fractions algébriques et simplifier le résultat obtenu.

a) $\dfrac{x}{x+2}+\dfrac{1-2x}{x-1}$

b) $\dfrac{1}{x^2-3x+1}+\dfrac{1}{x^2+2x-3}$

Exercices supplémentaires

Question 6
Simplifier les fractions algébriques suivantes.

a) $\dfrac{x-2}{x^2-4}$

b) $\dfrac{x^2-9}{x^2-8x+15}$

c) $\dfrac{3x-4}{9x^2-16}$

d) $\dfrac{x^2+2}{x^4-4}$

e) $\dfrac{(x+2)^2-1}{(x+2)}$

f) $\dfrac{x^4-3x^3+12x^2-8x}{2x^4-8x^3+4x^2}$

Question 7
Multiplier les fractions algébriques suivantes et simplifier le résultat obtenu.

a) $\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)\left(\dfrac{(x+1)^2}{x+2}\right)$

b) $\left(\dfrac{(x-2)^2}{(x+1)^2}\right)\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$

c) $\left(\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x+1)^2}\right)\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$

d) $\left(\dfrac{x^2-2x-3}{x^2+4x+4}\right)\left(\dfrac{x^2-4}{x-6x+9}\right)$

Question 8
Trouver le plus petit commun multiple des polynômes suivants.

a) $x-2$ et $x+1$

b) $x-2$ et $(x+1)^2$

c) $(x-2)^2$ et $(x-2)(x+1)^2$

d) $(x-2)(x+1)^3$ et $(x-2)^2(x+1)^2$

e) x^2+x+1 et $(x+1)^2$

f) x^2-2x-3 et $(x-3)^2$

Question 9
Multiplier ou diviser les fractions algébriques suivantes et simplifier le résultat obtenu.

a) $\left(\dfrac{1}{x-1}\right)\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

b) $\left(\dfrac{x^2}{x-2}\right)\left(\dfrac{1}{x^2+x}\right)$

c) $\left(\dfrac{x-2}{x+5}\right)\left(\dfrac{x^2-25}{x^2-4x+4}\right)$

d) $\left(\dfrac{2x+1}{x^2-6x+9}\right)\left(\dfrac{2x^2-7x+3}{4x^2+4x+1}\right)$

e) $\dfrac{\left(\dfrac{x^2-3x}{x^2+2x-15}\right)}{\left(\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-25}\right)}$

Question 10
Additionner ou soustraire les fractions algébriques suivantes et simplifier le résultat obtenu.

a) $\dfrac{x-2}{x+4}+\dfrac{1}{x+3}$

b) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{x+1}{x+2}$

c) $\dfrac{x}{x+1}-\dfrac{x+1}{x+2}$

d) $\dfrac{x}{x+1}+\dfrac{1}{x^2+2x+1}$

e) $\dfrac{x+1}{x+2}+\dfrac{1}{x^2+4x+4}$

f) $\dfrac{1}{x^2-6x+9}+\dfrac{1}{x^2-9}$

Solutions

Question 1

a) L'expression est une fraction algébrique

b) L'expression est une fraction algébrique. Note : x^2 est un polynôme.

c) L'expression est une fraction algébrique car son numérateur et son dénominateur sont des polynômes.

d) L'expression est n'est pas une fraction algébrique car son numérateur n'est pas un polynôme.

e) L'expression est une fraction algébrique. Note : x et 5 sont des polynômes.

f) L'expression est n'est pas une fraction algébrique car son numérateur n'est pas un polynôme.

g) L'expression est une fraction algébrique car son numérateur et son dénominateur sont des polynômes (constants).

Question 2

a) $$\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} = \frac{(x-3)(x-2)}{(x-3)(x+3)} = \frac{x-2}{x+3}$$

b) $$\begin{aligned}\frac{2x^3-7x^2+3x}{x^4-6x^3+9x^2} &= \frac{x\left(2x^2-7x+3\right)}{x^2(x^2-6x+9)} \\ &= \frac{x\left(2x^2-6x-x+3\right)}{x^2(x-3)^2)} \\ &= \frac{x(2x(x-3)-(x-3))}{x^2(x-3)^2} \\ &= \frac{x(2x-1)(x-3)}{x^2(x-3)^2} \\ &= \frac{(2x-1)}{x(x-3)} \\ &= \frac{2x-1}{x^2-3x}\end{aligned}$$

Question 3

a) $$\frac{(2x-3)(2x+3)(x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)(2x-3)} = 2x+3$$

b) $$\frac{(x+3)x}{2(x+2)}$$

c) $$\frac{(x-2)(x-3)(x+3)(x-1)}{(x-3)(x+3)(x-2)^2} = \frac{x-1}{x-2}$$

d) $$\frac{(2x-1)(x+3)(x+1)(x+2)}{(x-1)(x+1)(2x-1)(3x+1)} = \frac{(x+3)(x+2)}{(x-1)(3x+1)}$$

Question 4

a) $$\frac{3x-5}{x+3}$$

b) $$\frac{4x^2-1}{x^3-2x^2-8x}$$

Question 5

a) $$-\frac{x^2+4x-2}{x^2+x-2}$$

b) $$\frac{2(x+1)}{x^3+x^2-5x+3}$$

Question 6

a) $$\frac{(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}$$

b) $$\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-5)} = \frac{x+3}{x-5}$$

c) $$\frac{3x-4}{(3x-4)(3x+4)} = \frac{1}{3x+4}$$

d) $$\frac{x^2+2}{(x^2-2)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2-2}$$

e) $$\frac{x^2+2}{(x^2-2)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2-2}$$

f) $$\frac{x(x-2)^3}{2x^2(x-2)^2} = \frac{x-2}{2x}$$

Question 7

a) $$\frac{(x-2)(x+1)^2}{(x+1)(x+2)} = x+1$$

b) $$\frac{(x-2)^2(x+1)}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{x-2}{x+1}$$

c) $$\frac{(x-2)(x+3)(x+1)}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{(x+3)}{x+1}$$

d) $$\frac{(x-3)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+2)^2(x-3)^2} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-3)}$$

Question 8

a) $(x-2)(x+1)$

b) $(x-2)(x+1)^2$

c) $(x-2)^2(x+1)^2$

d) $(x-2)^2(x+1)^3$

e) $(x^2+x+1)(x+1)^2$

f) $(x+1)(x-3)^2$

Question 9

a) $$\frac{x}{(x-1)(x+1)} = \frac{x}{x^2-1}$$

b) $$\frac{x^2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{x}{x^2-x-2}$$

c) $$\frac{(x-2)(x-5)(x+5)}{(x+5)(x-2)^2} = \frac{x-5}{x-2}$$

d) $$\frac{(2x+1)(2x-1)(x-3)}{(x-3)^2(2x+1)^2} = \frac{2x-1}{2x^2-5x-3}$$

e) $$\frac{x}{x+2}$$

Question 10

a) $$\frac{(x-2)(x+3)+(x+4)}{(x-2)(x+4)} = \frac{x^2+2x-2}{x^2+7x+12}$$

b) $$\begin{aligned}&\frac{x(x+2)(x+2)+(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{(x(x+2)+(x+1))\cancel{(x+2)}}{(x+1)\cancel{(x+2)}} \\ &= \frac{x(x+2)+(x+1)}{x+1} \\ &= \frac{x^2+2x+x+1}{x+1} \\ &= \frac{x^2+3x+1}{x+1}\end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned}&\frac{x(x+2)(x+2)-(x+1)(x+2)}{(x+1)(x+2)} \\ &= -\frac{1}{x^2+3x+2}\end{aligned}$$

d) $$\frac{x(x+1)+1}{(x+1)^2} = \frac{x^2+x+1}{(x+1)^2}$$

e) $$\frac{(x+1)(x+2)+1}{(x+2)^2} = \frac{x^2+3x+3}{x^2+4x+4}$$

f) $$\frac{(x+3)+(x-3)}{(x+3)(x-3)^2} = \frac{2x}{x^3-3x^2-9x+27}$$