

Équations exponentielles et logarithmiques

1. Équations exponentielles

Définition. Une **équation exponentielle** est une équation où l'inconnue apparaît comme exposant.

Pour résoudre une équation exponentielle, on tente de la ramener à la forme

$$b^x = P.$$

On peut ensuite isoler x en utilisant les logarithmes :

$$b^x = P \iff x = \log_b(P).$$

Exemple 1. Résolvons l'équation

$$2^x = 8.$$

Par définition des logarithmes,

$$2^x = 8 \iff x = \log_2(8).$$

Comme $\log_2(8) = 3$, la solution est donc $x = 3$.

Exemple 2. Résolvons l'équation

$$10^x = 2.$$

Par définition des logarithmes,

$$10^x = 2 \iff x = \log(2).$$

La solution est donc $x = \log(2)$.

Question 1

Résoudre les équations suivantes.

a) $3^x = 10$

c) $2^x = \sqrt{2}$

b) $10^x = \frac{1}{100}$

d) $10^x = \frac{1}{\sqrt{100}}$

On peut résoudre une équation exponentielle même si l'exposant est plus complexe. Dans ce cas, il faut aussi transformer l'équation exponentielle avec l'équivalence $b^x = P \iff x = \log_b(P)$ et ensuite résoudre l'équation obtenue. Cette dernière peut être une simple équation du premier degré, ou une équation plus complexe.

Exemple 3. Résolvons l'équation

$$2^{x-3} = 16.$$

$$2^{x-3} = 16$$

$$x-3 = \log_2(16)$$

$$x-3 = 4$$

$$x = 7$$

Exemple 4. Résolvons l'équation

$$10^{2x+1} = \sqrt{10}.$$

$$10^{2x+1} = \sqrt{10}$$

$$2x + 1 = \log(\sqrt{10})$$

$$2x + 1 = \frac{1}{2}$$

$$2x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{4}$$

Exemple 5. Résolvons l'équation

$$3^{x^2-1} = 27.$$

$$3^{x^2-1} = 27$$

$$x^2 - 1 = \log_3(27)$$

$$x^2 - 1 = 3$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Question 2

Résoudre les équations suivantes.

a) $3^{x-2} = 27$

b) $10^{5x-3} = \frac{1}{100}$

Si l'équation donnée n'est pas de la forme $b^x = P$, on doit tenter de la mettre sous cette forme à l'aide de manipulations algébriques.

Exemple 6. Résolvons l'équation

$$3 \cdot 5^x = 2.$$

Par définition des logarithmes,

$$10^x = 2 \iff x = \log(2).$$

La solution est donc $x = \log(2)$.

Exemple 7. Résolvons l'équation

$$50 \cdot 5^{x+1} - 2 = 0.$$

$$50 \cdot 5^{x+1} - 2 = 0$$

$$50 \cdot 5^{x+1} = 2$$

$$5^{x+1} = \frac{2}{50}$$

$$5^{x+1} = \frac{1}{25}$$

$$x + 1 = \log_5\left(\frac{1}{25}\right)$$

$$x + 1 = -2$$

$$x = -3.$$

Question 3

Résoudre les équations suivantes.

a) $5 \cdot 3^x = 45$

c) $5^{2x-1} - 5 = 0$

b) $3 \cdot 2^{x+1} = 48$

d) $2 \cdot 10^{5x-3} - 20 = 0$

On peut enfin utiliser les propriétés des exposants ou d'autres techniques algébriques si nécessaire.

Rappel.

$$b^{EF} = b^E b^F$$
$$(b^E)^F = b^{EF} = (b^F)^E$$

Question 4

Résoudre les équations suivantes.

a) $2^{3x} \cdot 2^{x+1} = 32$

c) $5^{x^2-3x} = 25$

b) $\frac{3^{2x+1}}{3^{x-2}} = 27$

d) $4^{x^2-2x} = 64$

2. Équations logarithmiques

Définition. Une **équation logarithmique** est une équation où l'inconnue apparaît dans un logarithme.

Pour résoudre une équation logarithmique, on tente de la ramener à la forme

$$\log_b(P) = E$$

où P est une expression contenant la variable à isoler.

On peut ensuite isoler x en transformant l'équation logarithmique en équation exponentielle :

$$\log_b(x) = E \iff x = b^E.$$

2.1. Équations logarithmiques pouvant être résolues directement

Exemple 8. Résolvons l'équation

$$\log_2(x) = 3.$$

Par définition des logarithmes,

$$\log_2(x) = 3 \iff x = 2^3.$$

Comme $2^3 = 8$, la solution est $x = 8$.

Exemple 9. Résolvons l'équation

$$\log(x) = 2.$$

Par définition des logarithmes,

$$\log(x) = 2 \iff x = 10^2.$$

La solution est donc $x = 10^2 = 100$.

Question 5

Résoudre les équations suivantes.

a) $\log_3(x) = 2$

c) $\log_2(x) = 4$

b) $\log_2(x) = \frac{1}{2}$

d) $\log(x) = -\frac{3}{2}$

2.2. Équations logarithmiques impliquant des manipulations algébriques supplémentaires

Exemple 10. Résolvons l'équation

$$\log_2(x+5) = 3.$$

Par définition des logarithmes,

$$\begin{aligned} \log_2(x+5) &= 3 \\ x+5 &= 2^3 && \text{(déf. de log)} \\ x+5 &= 8 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Comme $2^3 = 8$, la solution est bien $x = 3$.

Exemple 11. Résolvons l'équation

$$2\log_2(x+5) = 3.$$

Par définition des logarithmes,

$$\begin{aligned} \log_2(x+5) &= \frac{3}{2} \\ x+5 &= 2^{\frac{3}{2}} && \text{(déf. de log)} \\ x+5 &= 8 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Comme $2^{\frac{3}{2}} = 8$, la solution est bien $x = 3$.

Exemple 12. Résolvons l'équation

$$4\log(3x) = 2.$$

On met sous la forme $\log(P) = E$ et on transforme en équation exponentielle.

$$\begin{aligned}4\log(3x) &= 2 \\ \log(3x) &= \frac{1}{2} \\ 3x &= 10^{\frac{1}{2}} && \text{(déf. de log)} \\ 3x &= \sqrt{10} \\ x &= \frac{\sqrt{10}}{3}\end{aligned}$$

La solution est donc $x = 10^2 = 100$.

Question 6

Résoudre les équations suivantes.

- a) $\log_3(x-2) = 4$ c) $2\log(3x+4) = 6$
b) $5\log_2(4x) = 10$ d) $12\log(\sqrt[3]{5}x) = 4$

2.3. Utilisation des propriétés des logarithmiques

Si une équation comporte plusieurs logarithmes, on peut la résoudre en utilisant les propriétés des logarithmes pour mettre l'équation sous la forme $\log_b(P) = E$ en combinant les logarithmes pour que l'équation résultante en comporte un seul. On peut ensuite résoudre l'équation avec les techniques des sections précédentes.

Rappel. Les propriétés suivantes des logarithmes permettent de combiner plusieurs logarithmes en un seul.

- $\log_b(AB) = \log_b(A) + \log_b(B)$
- $\log_b\left(\frac{A}{B}\right) = \log_b(A) - \log_b(B)$
- $\log_b(A^B) = B\log_b(A)$

Exemple 13. Résolvons l'équation

$$\log(x+1) + \log(5) = 1.$$

$$\begin{aligned}\log(x+1) + \log(5) &= 1 \\ \log(x+1) + \log(x-1) &= 1 \\ \log(5(x+1)) &= 1 && \text{[log d'un produit]} \\ 5(x+1) &= 10^1 && \text{[déf. de log]} \\ 5(x+1) &= 10 \\ x+1 &= 2 \\ x &= 1\end{aligned}$$

Exemple 14. Résolvons l'équation

$$\frac{\log(x+1)}{3} + \log(2) = 1.$$

$$\frac{\log(x+1)}{3} + \log(2) = 0$$

$$\frac{1}{3} \log(x+1) + \log(2) = 0$$

$$\log((x+1)^{\frac{1}{3}}) + \log(2) = 0$$

$$\log(\sqrt[3]{x+1}) + \log(2) = 0$$

$$\log(2\sqrt[3]{x+1}) = 0$$

$$2\sqrt[3]{x+1} = 10^0$$

$$2\sqrt[3]{x+1} = 1$$

$$\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$x+1 = \frac{1}{8}$$

$$x = \frac{1}{8} - 1 = -\frac{7}{8}$$

Exemple 15. Résolvons l'équation

$$\log_2(x) + \log_2(x+1) = 1$$

en utilisant les propriétés des logarithmes.

$$\log_2(x) + \log_2(x+1) = 1$$

$$\log_2(x(x+1)) = 1 \quad [\log \text{ d'un produit}]$$

$$x(x+1) = 2^1 \quad [\text{déf. de log}]$$

$$x(x+1) = 2$$

$$x(x+1) - 2 = 0$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2 \text{ ou } x = 1$$

On trouve les deux valeurs $x = -2$ et $x = 1$. Cependant, la valeur $x = -2$ ne peut être substituée dans l'équation donnée car $\log_2(-2)$ n'est pas défini.

L'équation a donc une seule solution : $x = 1$.

Question 7

Résoudre les équations suivantes.

a) $\log_2(x+1) - \log_2(5) = 3$

c) $\frac{\log(3x-5)}{2} = 2$

b) $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$

d) $\log(x+1) = -\log(x-1)$

Exercices supplémentaires

Question 8

Résoudre les équations suivantes.

a) $10^x = 1000$

b) $5^x = \frac{1}{125}$

c) $3^x = \frac{1}{9}$

d) $3^x = -9$

e) $2^x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

f) $10^x = \sqrt[3]{100}$

g) $10^x = \sqrt[3]{5}$

Question 9

Résoudre les équations suivantes.

a) $10^{x+2} = 1000$

b) $5^{x-2} = \frac{1}{125}$

c) $3^{2x+1} = \frac{1}{9}$

d) $2^{3x+4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

e) $10^x = \sqrt[3]{100}$

f) $10^{x-1} = \sqrt[3]{5}$

Question 10

Résoudre les équations suivantes.

a) $4 \cdot 10^{5x+2} = 40$

b) $27 \cdot 10^x = 22$

c) $15 \cdot 5^{2x+\frac{1}{2}} = 3$

d) $15 \cdot 3^{3x+1} - \frac{5}{3} = 0$

e) $10^{x-1} + 2 = 0$

f) $10 \cdot 2^{3x+2} - \frac{5}{\sqrt{2}} = 0$

g) $9^{2x+3} = 27^{4-4x}$

Question 11

Résoudre les équations suivantes.

a) $\log_5(x) = 3$

b) $\log(x) = 2$

c) $\log(x) = \frac{1}{2}$

d) $\log_2(x) = 4$

e) $\log 4(x) = -\frac{3}{2}$

Question 12

Résoudre les équations suivantes.

a) $\log(x+25) = 2$

b) $\log_5(x-2) = 2$

c) $5 \log(x) = \frac{1}{2}$

d) $3 \log_2(x-5) = 12$

e) $2 \log_4\left(5x - \frac{1}{2}\right) = 3$

f) $\log_2(3x+1) = \frac{7}{3}$

Question 13

La concentration C de bactéries dans l'eau d'un lac est initialement de 100000 bactéries par litre et la présence de déchets dans l'eau la fait augmenter : la concentration double à chaque jours. Si t est le nombre de jours écoulé, l'équation

$$C = 100000 \cdot 2^t$$

permet de déterminer le nombre de bactéries après t jours.

a) Déterminer il faut combien de jours pour le que la concentration soit de 50000000 bactéries par litre.

b) Déterminer il faut combien de jours pour que la concentration soit deux fois plus grande.

c) Déterminer il faut combien de jours pour que la concentration soit dix fois plus grande.

Question 14

Les décibels servent à mesurer l'intensité sonore et la puissance d'amplification d'un circuit électronique.

Le nombre de décibels associé à une puissance P par rapport à une puissance de référence P_0 . Le nombre de décibel D est défini par l'expression :

$$D = 10 \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

a) Si un amplificateur double la puissance, le rapport de puissance est $\frac{P}{P_0} = 2$. Montrer que doubler la puissance d'un signal correspond approximativement à 3 décibels.

b) Si un amplificateur a une amplification de 10 décibels, quel est le rapport de puissance ?

c) Si un amplificateur a une amplification de -10 décibels, quel est le rapport de puissance ?

Question 15

Résoudre les équations suivantes.

a) $\log_2(x) + \log_2(5) = 3$

b) $\log_2(x+2) + \log_2(3) = \log_2(27)$

c) $\log(5x) - \log(3) = 1$

d) $\log_3(x+3) - \log_3(2) = \log_3(x-1) - \log_3(7)$

e) $\log_5(x) - \log_{25}(x) + \log_{\sqrt{5}}(x) = -5$

f) $\log_2(3x) - 2 = \log_2(2x-5)$

g) $\log(x^2) + \frac{1}{2} \log(4) = \log(x^2 + 16)$

h) $\log(\sqrt{x-1}) + \log(\sqrt{x+1}) = 0$

Question 16

Résoudre les équations logarithmiques suivantes.

- a) $\log_3(x) + \log_3(x-2) = \log_3(x+10)$
- b) $\log(4x-10) - \log(x-2) = \log(x-1)$
- c) $\log_2(12x-5) - 3 = \log_2(2x-1)$

Question 17

Résoudre les équations suivantes.

- a) $3^x = 27$
- b) $\log_2(x) = 32$
- c) $2^x + 1 = 16$
- d) $2^{x+1} = 16$
- e) $2^{x-1} = 3^{2x+4}$
- f) $\log_2(x+1) = 7$
- g) $\log_2(2x+1)^6 = \log_2(x)$
- h) $\log_2(x) = 5$
- i) $3^x = 100$
- j) $\ln(x) = 7$
- k) $e^{2x+1} = 10$
- l) $5 \cdot 3^x = 2^{x+1}$
- m) $2 \log_4(x) - \log_4(x-1) = 1$

Question 18 (Difficile)

Résoudre l'équation suivante :

$$\log_4(2^x) = x + 1.$$

Question 19 (Difficile)

Résoudre l'équation suivante :

$$2 + \log(\sqrt{1+x}) + 3 \log(\sqrt{1-x}) = \log(\sqrt{1-x^2})$$

Question 20 (Niveau concours !)

Résoudre l'équation suivante :

$$16^x + 20^x = 25^x.$$

Question 21

Sørensen en 1909 a défini le *pH* comme étant

$$pH = \log_{10}([H^+]),$$

où $[H^+]$ est la concentration molaire en ions hydrogènes dans une solution.

Le jus de citron a un pH de 2 et le café un pH de 5. Combien de fois le jus de citron est-il plus acide ? Autrement dit, quel est le rapport

$$\frac{[H^+]_{\text{citron}}}{[H^+]_{\text{café}}} ?$$

Solutions

Question 1

a) $3^x = 10$
 $x = \log_3(10)$

b) $10^x = \frac{1}{100}$
 $x = \log\left(\frac{1}{100}\right)$
 $= -2$

c) $2^x = \sqrt{2}$
 $x = \log(\sqrt{2})$
 $= \frac{1}{2}$

d) $10^x = \frac{1}{\sqrt{100}}$
 $x = \log\left(\frac{1}{\sqrt{100}}\right)$
 $= \log\left(\frac{1}{10}\right)$
 $= -\frac{1}{2}$

Question 2

a) $3^{x-2} = 27$
 $x-2 = \log_3(27)$
 $x-2 = 3$
 $x = 5$

b) $10^{5x-3} = \frac{1}{100}$
 $5x-3 = \log\left(\frac{1}{100}\right)$
 $5x-3 = -2$
 $5x = 1$
 $x = \frac{1}{5}$

Question 3

a) $5 \cdot 3^x = 45$
 $3^x = \frac{45}{5}$
 $3^x = 9$
 $x = \log_3(9)$
 $= 2$

b) $3 \cdot 2^{x+1} = 48$
 $2^{x+1} = \frac{48}{3}$
 $2^{x+1} = 16$
 $x+1 = \log_2(16)$
 $x+1 = 4$
 $x = 3$

c) $5^{2x-1} - 5 = 0$
 $5^{2x-1} = 5$
 $2x-1 = \log_5(5)$
 $2x-1 = 1$
 $2x = 2$
 $x = 1$

d) $2 \cdot 10^{5x-3} - 20 = 0$
 $2 \cdot 10^{5x-3} = 20$
 $10^{5x-3} = 10$
 $5x-3 = \log(10)$
 $5x-3 = 1$
 $5x = 4$
 $x = \frac{4}{5}$

Question 4

a) $2^{3x} \cdot 2^{x+1} = 32$
 $2^{3x+x+1} = 2^5$
 $2^{4x+1} = 2^5$
 $4x+1 = 5$
 $4x = 4$
 $x = 1$

b) $\frac{3^{2x+1}}{3^{x-2}} = 27$
 $3^{(2x+1)-(x-2)} = 3^3$
 $3^{x+3} = 3^3$
 $x+3 = 3$
 $x = 0$

c) $5^{x^2-3x} = 25$
 $5^{x^2-3x} = 5^2$
 $x^2-3x = 2$
 $x^2-3x-2 = 0$
 $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$

d) $4^{x^2-2x} = 64$
 $4^{x^2-2x} = 4^3$
 $x^2-2x = 3$
 $x^2-2x-3 = 0$
 $(x-3)(x+1) = 0$
 $x = 3$ ou $x = -1$

Question 5

a) $\log_3(x) = 2$
 $x = 3^2 = 9$

b) $\log_2(x) = \frac{1}{2}$
 $x = 2^{1/2}$
 $= \sqrt{2}$

c) $\log_2(x) = 4$
 $x = 2^4$
 $= 16$

d) $\log(x) = -\frac{3}{2}$
 $x = 100^{-3/2}$
 $= \frac{1}{\sqrt{10^3}}$

Question 6

a) $\log_3(x-2) = 4$
 $x-2 = 3^4$
 $x-2 = 81$
 $x = 83$

b) $5 \log_2(4x) = 10$
 $\log_2(4x) = 2$
 $4x = 2^2$
 $4x = 4$
 $x = 1$

c) $2 \log(3x+4) = 6$
 $\log(3x+4) = 3$
 $3x+4 = 10^3$
 $3x+4 = 1000$
 $3x = 996$
 $x = 332$

d) $12 \log(\sqrt[3]{5}x) = 4$
 $\log(\sqrt[3]{5}x) = \frac{4}{12}$
 $\log(\sqrt[3]{5}x) = \frac{1}{3}$
 $\sqrt[3]{5}x = 10^{\frac{1}{3}}$
 $\sqrt[3]{5}x = \sqrt[3]{10}$
 $x = \frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{5}}$
 $= \sqrt[3]{\frac{10}{5}}$
 $= \sqrt[3]{2}$

Question 7

a) $\log_2(x+1) - \log_2(5) = 3$
 $\log_2\left(\frac{x+1}{5}\right) = 3$
 $\frac{x+1}{5} = 2^3$
 $\frac{x+1}{5} = 8$
 $x+1 = 40$
 $x = 39$

b) $\log_2(x+1) + \log_2(x+3) = 3$
 $\log_2((x+1)(x+3)) = 3$
 $(x+1)(x+3) = 2^3$
 $x^2+4x+3 = 8$
 $x^2+4x-5 = 0$
 $(x-1)(x+5) = 0$
 $x = 1$ ou -5

La solution $x = -5$ doit être rejetée car si on la substitue dans l'équation, on doit évaluer le logarithme d'un nombre négatif, ce qui est impossible.

La solution est donc $x = 1$.

c) $\frac{\log(3x-5)}{2} = 2$
 $\frac{1}{2} \log(3x-5) = 2$
 $\log(\sqrt{3x-5}) = 2$
 $\sqrt{3x-5} = 10^2$
 $\sqrt{3x-5} = 100$
 $3x-5 = 100^2$
 $3x-5 = 10000$
 $3x = 10005$
 $x = \frac{10005}{3} = 3335$

d) $\log(x+1) = -\log(x-1)$
 $\log(x+1) + \log(x-1) = 0$
 $\log((x+1)(x-1)) = 0$
 $(x+1)(x-1) = 10^0$
 $(x+1)(x-1) = 1$
 $x^2-1 = 1$
 $x^2 = 2$
 $x = \pm \sqrt{2}$

La valeur $-\sqrt{2}$ n'est pas une solution valable, car si on la substitue dans l'équation donnée, on obtient des logarithmes de nombres négatifs.

L'unique solution est donc $x = \sqrt{2}$.

Question 8

a) $x = 3$ tion.
 b) $x = -3$ e) $x = -\frac{1}{2}$
 c) $x = -2$ f) $x = \frac{2}{3}$
 d) Aucune solution. g) $x = \log(\sqrt[3]{5})$

Question 9

a) $x = 1$ d) $x = -\frac{3}{2}$
 b) $x = -1$ e) $x = \frac{2}{3}$
 c) $x = -\frac{3}{2}$ f) $x = \log(\sqrt[3]{5}) + 1$

Question 10

a) $x = -\frac{1}{5}$ d) $x = -1$
 b) $x = \log\left(\frac{22}{27}\right)$ e) Aucune solution.
 c) $\frac{1}{x} = \frac{-5}{6}$ f) $x = -\frac{7}{6}$
 g) $x = \frac{3}{8}$

Question 11

a) $x = 125$ d) $x = 16$
 b) $x = 100$ e) $x = \frac{1}{8}$
 c) $x = \sqrt{10}$

Question 12

- a) $x = 75$ d) $x = 21$
 b) $x = 27$ e) $x = \frac{17}{10}$
 c) -1 f) $x = \frac{\sqrt[3]{27}-1}{3}$

Question 13

- a) $5000000 = 1000000 \cdot 2^t$
 $50 = 2^t$
 $\log_2(50) = t$
 $t = \log_2(50)$
 $= \frac{\log(50)}{\log(2)}$
 ≈ 5.644 jours

Le nombre de bactéries par litre dépasse 50000000 après 6 jours.

- b) $2 \cdot 1000000 = 1000000 \cdot 2^t$
 $2 = 2^t$
 $\log_2(2) = t$
 $t = \log_2(2)$
 $= 1$ jour

La concentration double donc en une journée.

- c) $10 \cdot 1000000 = 1000000 \cdot 2^t$
 $10 = 2^t$
 $\log_2(10) = t$
 $t = \log_2(10)$
 $= \frac{\log(10)}{\log(2)}$
 $= \frac{1}{\log(2)}$
 $= 3.322$ jours

Il faut donc 4 jours pour que la concentration soit 10 fois plus grande.

Question 14

- a) $D = 10 \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$
 $= 10 \log(2)$
 $\approx 10(0.301)$
 ≈ 3.01
 ≈ 3

- b) $10 = 10 \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$
 $1 = \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$
 $10 = \frac{P}{P_0}$

Le rapport de puissance est donc 10.

- c) $-10 = 10 \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$
 $-1 = \log\left(\frac{P}{P_0}\right)$
 $10^{-1} = \frac{P}{P_0} = \frac{1}{10}$

Le rapport de puissance est donc $\frac{1}{10}$.

Question 15

- a) $x = \frac{8}{5}$ e) $x = \frac{1}{25}$
 b) $x = 7$ f) $x = 4$
 c) $x = 6$ g) $x = \pm 4$
 d) $x = -\frac{23}{5}$ h) $x = \sqrt{2}$

Question 16

- a) $x = 5$. Note : $x = -2$ n'est pas une solution car -2 n'est pas dans le domaine de l'équation.
 b) $x = 3$ ou $x = 4$
 c) $x = \frac{3}{4}$

Question 17

- a) $x = 3$
 b) $x = 2^{32}$
 c) $x = \log_2(15)$
 d) $x = 3$
 e) $x = \frac{1+4\log_2(3)}{1-2\log_2(3)}$
 f) $x = 127$
 g) $x = -\frac{64}{127}$
 h) $x = 32$
 i) $x \approx 4.19$
 j) $x = e^7 \approx 1096.63$
 k) $x = \frac{\ln(10)-1}{2} \approx 0.6513$
 l) $x = \frac{\ln(5/2)}{\ln(2/3)} \approx -2.26$
 m) $x = 16$

Question 18

- $\log_4(2^x) = x + 1$
 $x \log_4(2) = x + 1$
 $\frac{1}{2} = x + 1$
 $\frac{x}{2} = x + 1$
 $-\frac{x}{2} = 1$
 $x = -2$

Question 19

$$2 + \log(\sqrt{1+x}) + 3 \log(\sqrt{1-x})$$

$$= \log(\sqrt{1-x^2}) \text{ ou } \log(\sqrt{1-x^2})^3$$

$$2 + \log(\sqrt{1+x}) + \log((\sqrt{1-x})^3)$$

$$= \log(\sqrt{1-x^2})$$

$$\log(\sqrt{1+x}) + \log((\sqrt{1-x})^3)$$

$$- \log(\sqrt{1-x^2})$$

$$= -2$$

$$\log\left(\frac{\sqrt{1+x}(\sqrt{1-x})^3}{\sqrt{1-x^2}}\right) = -2$$

$$\frac{\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}(\sqrt{1-x})^2}{\sqrt{1-x^2}} = 10^{-2}$$

$$\frac{\sqrt{(1+x)(1-x)}(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{100}$$

$$\frac{\sqrt{(1-x^2)}(1-x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{100}$$

$$1-x = \frac{1}{100}$$

$$x = \frac{99}{100}$$

On vérifie que cette solution est bien dans le domaine de l'équation en substituant dans l'équation de départ :

$$2 + \log\left(\sqrt{1 + \frac{99}{100}}\right) + 3 \log\left(\sqrt{1 - \frac{99}{100}}\right)$$

$$= \log\left(\sqrt{1 - \frac{99^2}{100^2}}\right)$$

Toutes les racines et tous les logarithmes de cette expression sont définis.

Question 20

Ce problème difficile est du niveau d'un concours de mathématiques au secondaire.

$$16^x + 10^x = 25^x$$

$$\frac{16^x}{16^x} + \frac{10^x}{16^x} = \frac{25^x}{16^x}$$

$$1 + \left(\frac{10}{16}\right)^x = \left(\frac{25}{16}\right)^x$$

$$1 + \left(\frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 4}\right)^x = \left(\left(\frac{5}{4}\right)^2\right)^x$$

$$1 + \left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\left(\frac{5}{4}\right)^x\right)^2$$

En posant $r = \left(\frac{5}{4}\right)^x$, l'équation devient $1 + r = r^2$.

$$r^2 - r - 1 = 0.$$

On utilise la formule de Descartes pour trouver les valeurs de r qui satisfont cette équation :

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1-4(1)(-1)}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Comme $r = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ est toujours positif, on peut ignorer la solution négative $r = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On a donc que

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

On trouve enfin la valeur de x en prenant le logarithme :

$$\log\left(\left(\frac{5}{4}\right)^x\right) = \log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

$$x \log\left(\frac{5}{4}\right) = \log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

On trouve la solution

$$x = \frac{\log\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)}{\log\left(\frac{5}{4}\right)}$$

Question 21

$pH_{\text{citron}} = 2 = -\log_{10}([H^+])$, et donc

$$[H^+]_{\text{citron}} = 10^{-2}.$$

$pH_{\text{café}} = 5 = -\log_{10}([H^+])$, et donc

$$[H^+]_{\text{café}} = 10^{-5}.$$

Le rapport des $[H^+]$ est donc

$$\frac{[H^+]_{\text{citron}}}{[H^+]_{\text{café}}} = \frac{10^{-2}}{10^{-5}}$$

$$= 10^3$$

$$= 1000.$$

Le jus de citron est donc 1000 fois plus acide que le café.